Зоопарк чудовищ
или знакомство со специальными функциями

О.М. Киселев

Предисловие

Курс лекций посвящен знакомству со специфическим разделом математики – специальными функциями. Под специальной функцией можно понимать любую функцию, не входящую в число элементарных функций, изучаемых в школьном курсе алгебры и анализа. Конечно это определение неконструктивно. Отбор материала для предлагаемого курса лекций связан с моими научными интересами в области нелинейных дифференциальных уравнений. Метод исследования свойств спецфункций основан на анализе соответствующих решений дифференциальных уравнений.

Этот спецкурс читался пятикурсникам Уфимского Авиационного Технического Университета, специализирующимся по прикладной математике, в осеннем семестре 1999-2000 учебного года, а также студентам-математикам 3-го и 4-го курсов Башкирского Государственного Университета, специализирущимся по дифференциальным уравнениям, в весеннем семестре того же учебного года. Хочу выразить благодарность всем моим слушателям за проявленный интерес и внимание.

О. Киселев
ok@ufanet.ru

Содержание

1 Гамма-функция.

Интегральное представление гамма-функции получено как решение разностного уравнения. Исследовано поведение гамма-функции в полюсах. Выведена формула для произведения гамма-функций.

1.1 Определение

Если провести статистический анализ математических текстов, то окажется, что восклицательный знак встречается значительно чаще вопросительного. Почему? Может сложиться впечатление, что математики так выражают своё восторженное отношение к своим работам. Это впечатление верно только отчасти. Дело в том, что восклицательный знак в математических трудах обычно означает взятие факториала какого-либо целого неотрицательного числа:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Функцию факториал можно еще записать в виде рекурсионного соотношения:

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!.$$

Это соотношение можно рассматривать не только при целых значениях n. Однако, в этом случае хорошо бы новую функцию обозначить подругому, чтобы не путать с хорошо знакомой функцией факториал.

Рассмотрим разностное уравнение

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{1}$$

Несмотря на простую форму записи, в элементарных функциях это уравнение не решается. Его решение называется гамма-функцией. Гамма-функцию можно записать в виде ряда или в виде интеграла. Для изучения глобальных свойств гамма-функции обычно пользуются интегральным представлением.

1.2 Интегральное представление

Перейдем к решению этого уравнения. Будем искать решение в виде интеграла Лапласа:

$$\Gamma(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Gamma}(p) \exp(-pz) dp.$$

В этом случае правая часть уравнения (1) может быть записана в виде:

$$z\Gamma(z) = z\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\Gamma}(p)\exp(-pz)dp =$$
$$-\tilde{\Gamma}(p)\exp(-pz)|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\Gamma}'(p)\exp(-pz)dp. \qquad (2)$$

Конечно, эта формула справедлива, если существуют пределы для внеинтегрального члена. Заранее нам не известно поведение образа $\tilde{\Gamma}(p)$ при $p \to \pm\infty$. Предположим, что образ гамма-функции таков, что внеинтегральное слагаемое равно нулю. После того, как будет найдено решение, конечно надо будет проверить, верно ли предположение о внеинтегральном слагаемом, иначе придется искать $\Gamma(z)$ как-нибудь по-другому.

Левая часть равенства (1) записывается следующим образом:

$$\Gamma(z+1) = \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\Gamma}(p)\exp(-pz)\exp(-p).$$

Тогда уравнение (1) для образа гамма-функции имеет вид:

$$\tilde{\Gamma}(p)\exp(-p) = \tilde{\Gamma}'(p).$$

Это уравнение легко решить:

$$\tilde{\Gamma} = -C\exp(-\exp(-p)), \quad \text{где} \quad C = \text{const}.$$

Нетрудно заметить, что найденная функция $\tilde{\Gamma}(p)$ на самом деле такова, что внеинтегральнй член в формуле (2) равен нулю.

Зная образ гамма-функции, легко получить и выражение для прообраза:

$$\Gamma(z) = C\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\exp(-p))\exp(-pz)dp.$$

Это неканоническая формула, для того, чтобы привести ее к виду, полученному Эйлером, надо сделать замену переменной интегрирования: $t = \exp(-p)$, тогда интеграл примет вид:

$$\Gamma(z) = C\int_{0}^{\infty}\exp(-t)t^{(z-1)}dt.$$

Постоянная C выбирается так, чтобы при целых значениях z гамма-функция совпадала с функцией факториал: $\Gamma(n+1) = n!$, тогда:

$$\Gamma(1) = C\int_{0}^{\infty}\exp(-t)dt = 1,$$

следовательно $C = 1$. Окончательно, получаем формулу Эйлера для гамма-функции:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \exp(-t)t^{(z-1)}dt. \tag{3}$$

Эта функция очень часто встречается в математических текстах. При работе со специальными функциями, пожалуй, даже чаще, чем восклицательный знак.

Проверить, что функция, определенная формулой (3), действительно удовлетворяет уравнению (1), можно, проинтегрировав интеграл в правой части этой формулы по частям:

$$\Gamma(z) = \frac{t^z}{z}\exp(-t)|_0^\infty + \frac{1}{z}\int_0^\infty \exp(-t)t^z dt = \frac{1}{z}\Gamma(z+1).$$

1.3 Область определения и полюсы

В подынтегральной функции интеграла (3) при $t \to \infty$ экспонента $\exp(-tz)$ при $\Re(z) > 0$ убывает гораздо быстрее, чем растет алгебраическая функция $t^{(z-1)}$. Особенность в нуле – интегрируемая, поэтому несобственный интеграл в (3) сходится абсолютно и равномерно при $\Re(z) > 0$. Более того, последовательным дифференцированием по параметру z легко убедиться, что $\Gamma(z)$ – голоморфная функция при $\Re(z) > 0$. Однако, непригодность интегрального представления (3) при $\Re(z) \le 0$ не означает, что там не определена сама гамма-функция – решение уравнения (1).

Рассмотрим поведение $\Gamma(z)$ в окрестности нуля. Для этого представим:

$$\Gamma(z+1) = 1 + zf(z),$$

где $f(z)$– голоморфная функция в окрестности $z = 0$. Из формулы (1) следует:

$$\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z.$$

Тогда

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} + f(z),$$

то есть $\Gamma(z)$ имеет полюс первого порядка при $z = 0$.

Также легко получить:

$$\Gamma(z-1) = \Gamma(z)/(z-1) = \frac{1}{(z-1)z} + \frac{f(z)}{(z-1)},$$

то есть в окрестности точки $z = -1$ функция $\Gamma(z)$ также имеет полюс первого порядка.

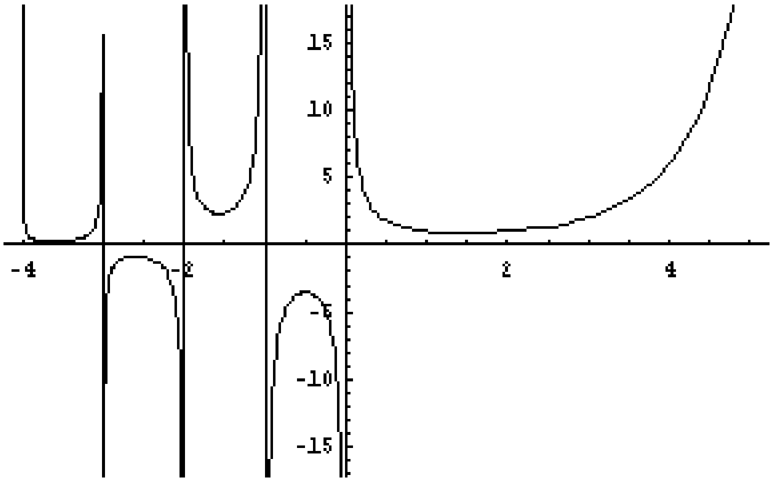

Рис. 1: График гамма-функции вещественной переменной.

Таким же образом можно получить формулу:

$$\Gamma(z-n) = \frac{1 + zf(z)}{z(z-1)(z-2)\cdot\ldots\cdot(z-n)}. \tag{4}$$

Из этой формулы следует, что точки $z = 0, -1, -2, \ldots$ – простые полюсы гамма-функции и других полюсов на вещественной оси эта функция не имеет. Нетрудно вычислить вычет в точке $z = -n, n = 0, 1, 2, \ldots$:

$$res_{z=-n}\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

1.4 Представление Ганкеля через интеграл по петле

Выясним, имеет ли гамма-функция нули. Для этого рассмотрим функцию

$$I(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}.$$

Полюсы этой функции и есть нули функции $\Gamma(z)$.

Разностное уравнение для $I(z)$ легко получить, воспользовавшись выражением для $\Gamma(z)$:

$$I(z) = zI(z+1).$$

Выражение для решения этого уравнения в виде интеграла можно получить так же, как было получено интегральное выражение для гамма-функции – через преобразование Лапласа. Ниже приведены вычисления, без особых подробностей (они такие же, как и в п.1).

$$\tilde{I} = (\exp(p)\tilde{I})',$$

или

$$\tilde{I} = \exp(p)\tilde{I} + \tilde{I}'.$$

После разделения переменных получим:

$$\frac{d\tilde{I}}{\tilde{I}} = (1 - \exp(p))dp.$$

Проинтегрировав:

$$\log(\tilde{I}) = p - \exp(p) + C, \quad \text{или} \quad \tilde{I} = C\exp(p - \exp(p)).$$

Переход к прообразу Лапласа дает:

$$I(z) = C\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-pz + p - \exp(p))dp.$$

В интеграле сделаем замену переменной интегрирования:

$$t = -\exp(p), \quad \text{тогда} \quad I(z) = C\int_{-\infty}^{0} \exp(t)t^{-z}dt.$$

Здесь важно заметить, что подынтегральная функция при нецелых значениях z имеет точку ветвления $t = 0$. На комплексной плоскости переменной t проведем разрез по отрицательной вещественной полуоси. Интеграл по этой полуоси представим как сумму интеграла по верхнему берегу этого разреза от $-\infty$ до 0 и интеграла от 0 до $-\infty$ по нижнему берегу разреза. Чтобы интеграл не проходил через точку ветвления, устроим вокруг нее петлю. В результате получим:

$$I(z) = \frac{C}{2}\int_{-\infty}^{(+0)} \exp(t)t^{-z}dt.$$

Чтобы выяснить значение постоянной, вспомним, что $I(1) = 1$, с другой стороны:

$$I(0) = \frac{C}{2}2\pi i.$$

Интегральное представление

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(+0)} \exp(t)t^{-z}dt. \tag{5}$$

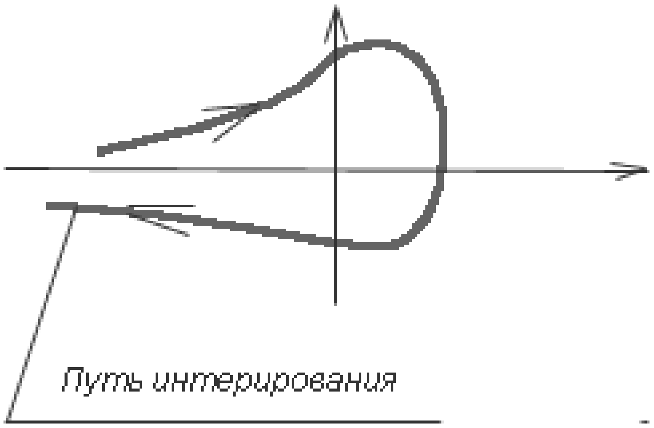

Рис. 2: Петля в интегральном представлении Ганкеля.

называется представлением Ганкеля по петле.

Легко видеть, что функция $1/\Gamma(z)$ не имеет полюсов в комплексной плоскости, следовательно, гамма-функция не имеет нулей.

С помощью этого интегрального представления можно получить формулу для произведения гамма-функций. Для этого в интеграле сделаем замену переменной $\tau = -t$, тогда:

$$\frac{2\pi i}{\Gamma(z)} = \int_{-\infty}^{(+0)} \exp(t) t^{-z} dt = \int_{\infty}^{0} \exp(-\tau)\tau^{-z} \exp(i\pi z) -$$

$$\int_{0}^{\infty} \exp(-\tau)\tau^{-z} \exp(-i\pi z) = 2i \sin(\pi z)\Gamma(1-z),$$

то есть

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

1.5 Предельная форма Эйлера

Гамма-функцию можно представить в виде бесконечного произведения. Это можно заметить, если в интеграле (3) представить

$$\exp(-t) = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{t}{n})^n.$$

Тогда интегральное представление гамма-функции:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{t}{n})^n t^{(z-1)} dt.$$

Оказывается, в этой формуле можно поменять пределы – предел интегрирования в несобственном интеграле и предел при $n \to \infty$ внутри интеграла. Перестановка пределов – тонкая операция. Здесь доказательство возможности этой перестановки опущено. Приведем результат:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n t^{(z-1)} dt.$$

Возьмем по частям этот интеграл:

$$\Gamma_n(z) = \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n t^{(z-1)} dt =$$

$$= \frac{t^{z-1+1}}{z}(1 - \frac{t}{n})^n |_{t=0}^{t=n} - \int_0^n \frac{t^{z-1+1}}{z}(-1)(1 - \frac{t}{n})^{n-1} dt.$$

Если провести эту процедуру n раз, получим:

$$\Gamma_n(z) = \frac{n!\, n^z}{(z+1)(z+2)\dots(z+n)}.$$

Переходя к пределу, получим предельную форму Эйлера для гамма-функции:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{(z+1)(z+2)\dots(z+n)}. \tag{6}$$

1.6 Формула для произведения

Ниже понадобится формула, в которой произведение двух гамма-функций представляется через одну гамма-функцию. Выведем эту формулу, используя интегральное представление гамма-функций.

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty \exp(-y) y^{p-1} dy \int_0^\infty \exp(-x) x^{p-1} dx.$$

Повторный интеграл представим как двойной несобственный интеграл. Это можно сделать, воспользовавшись теоремой Фубини. В результате получим:

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_{x>0,\, y>0} \exp(-y) y^{q-1} \exp(-x) x^{p-1} dx dy.$$

Несобственный интеграл равномерно сходится. Его можно рассматривать, например, как интеграл по треугольнику, ограниченному осями координат и прямой $x + y = R$ при $R \to \infty$. В двойном интеграле сделаем замену переменных:

$$x + y = u, \quad y = uv.$$

Якобиан этой замены
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = u.$$
Пределы интегрирования: u меняется от 0 до ∞, v при этом меняется от 0 до 1. В результате получим:

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_{0 \le u, 0 \le v \le 1} \exp(-u) u^{p+q-1} v^{p-1} (1-v)^{q-1} du dv.$$

Перепишем опять этот интеграл как повторный, в результате получим:

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q) \int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1} dv,$$

где $\Re p > 0, \Re v > 0$.

1.7 Задача

Обосновать перестановку пределов при выводе представления гамма-функции в предельной форме Эйлера.

1.8 Литература

При подготовке этой лекции частично использовался учебник:

Ф.Олвер. Асимптотика и специальные функции М.: Наука, 1990.

2 Гипергеометрическая функция

Гипергеометрическая функция – обобщение геометрической – прогрессии обладает рядом замечательных свойств, благодаря которым она привлекала внимание математиков в течении по крайней мере двух веков. Изучение этой функции привело Гаусса к исследованию вопроса сходимости рядов, Римана – к задаче об аналитическом продолжении и к изучению дифференциальных уравнений с особыми точками.

Гипергеометрическая функция реализует примитивную мечту философов о философском камне. Правда, в миниатюре – только для элементарных функций и то не для всех. Судите сами. Функция, зависящая от четырех параметров $F(a, b, c, z)$ такова, что:

$$F(1, b, b, z) = \frac{1}{1-z}; \quad F(-n, b, b, z) = (1-z)^n;$$

$$zF(1, 1, 2, -z) = \ln(1+z);$$

и, более того:

$$\exp(z) = \lim_{\beta \to \infty} F(1, b, 1, z/b).$$

Вполне естественно, что функция со столь интересными свойствами занимала умы математиков. Прежде всего изучали свойства ряда по степеням z. Коэффициенты этого ряда зависят от параметров a, b, c:

$$F(a, b, c; z) = 1 + \frac{ab}{1\,c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1\,2\,c(c+1)} z^2 +$$

$$+ \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1\,2\,3\,c(c+1)(c+2)} z^3 + \dots.$$

Название "гипергеометрический"этому ряду дал Валлис в 1655 году. Позже его изучали Эйлер и Куммер. Однако, до работ Гаусса это ряд нельзя было называть функцией в современном понимании этого слова. Гаусс доказал сходимость гипергеометрического ряда и, следовательно, существование гипергеометрической функции.

Тем не менее проблемы оставались и после работ Гаусса. Легко понять, что гипергеометрический ряд сходится лишь в единичном круге на комплексной плоскости, в то время, как гипергеометрическая функция может быть аналитически продолжена и за границу этого круга. Проблема – построить аналитическое продолжение гипергеометрической функции на всю комплексную плоскость. Такое аналитическое продолжение можно сделать, изучив свойства решений дифференциального уравнения для гипергеометрической функции. Это уравнение названо гипергеометрическим, оно изучалось Риманом.

2.1 Гипергеометрический ряд

Гипергеометрический ряд имеет вид:

$$F(a,b,c,z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+s-1)b(b+1)\dots(b+s-1)}{c(c+1)\dots(c+s-1)} \frac{z^s}{s!}. \qquad (7)$$

Здесь предполагается, что $c \neq 0$, и c не равно отрицательному целому числу.

Воспользовавшись признаком Даламбера для сходимости рядов, легко показать, что радиус сходимости ряда (7) равен единице.

Теперь наша задача – написать аналитическое продолжение функции $F(a,b,c,z)$ при $|z| \geq 1$. Для этого представим произведения $(\lambda)_k = \lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+k-1)$ через гамма-функции:

$$(\lambda)_k = \frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)}.$$

Тогда:

$$\frac{(b)_k}{(c)_k} = \frac{\Gamma(b+k)}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+k)}.$$

Здесь воспользуемся формулой для произведения гамма-функций:

$$\Gamma(b+k)\Gamma(c-b) = \Gamma(c+k) \int_0^1 t^{b+k-1}(1-t)^{c-b-1} dt,$$

в результате получим:

$$\frac{(b)_k}{(c)_k} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1+k}(1-t)^{c-b-1} dt.$$

Это выражение подставим в формулу для $F(a,b,c,z)$:

$$F(a,b,c,z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!} z^k \int_0^1 t^{b-1+k}(1-t)^{c-b-1} dt.$$

Так как ряд и интеграл сходятся абсолютно и равномерно, то можно поменять знак интеграла со знаком суммы. В результате получим:

$$F(a,b,c,z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 dt\; t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!} z^k t^k.$$

Дальше надо воспользоваться известной формулой биномиального разложения:

$$\frac{1}{(1-tz)^a} = 1 + atz + \frac{a(a+1)}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!} z^k t^k.$$

Окончательно получается интегральное выражение для гипергеометрической функции.

$$F(a,b,c,z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt.$$

Эта формула получена Эйлером. Она позволяет продолжить функцию $F(a,b,c,z)$ во внешность единичного круга, потому что интеграл существует при любом значении, если $\Re(a)<1$. Если $\Re(a)\geq 1$, тогда надо исключить точки, лежащие на луче $z\in[1,\infty)$.

2.2 Гипергеометрическое уравнение

Гипергеометрическим уравнением называется уравнение вида:

$$z(1-z)w''+(c-(a+b+1)z)w'-abw=0. \tag{8}$$

С помощью прямой подстановки ряда для гипергеометрической функции можно убедиться, что она является решением этого дифференциального уравнения.

Если это уравнение записать в стандартном виде:

$$w''+\frac{(c-(a+b+1)z)}{z(z-1)}w'-\frac{ab}{z(z-1)}w=0,$$

тогда легко видеть, что коэффициенты гипергеометрического уравнения имеют особенности в точках $z=0$, $z=1$. Еще одна особая точка для коэффициентов этого уравнения $z=\infty$. Чтобы убедиться в этом, сделаем замену независимой переменной: $t=1/z$. Тогда:

$$\frac{d}{dz}=\frac{dt}{dz}\frac{d}{dt}=-t^2\frac{d}{dt},$$

$$\frac{d^2}{dz^2}=\frac{d}{dz}\Big(-t^2\frac{d}{dt}\Big)=-2t^3\frac{d}{dt}+t^4\frac{d^2}{dt^2}.$$

Гипергеометрическое уравнение примет вид:

$$\frac{t-1}{t^2}\Big(-2t^3w'(t)+t^4w''\Big)-\Big(c-\frac{a+b-1}{t}\Big)t^2w'(t)-abw=0$$

или

$$w''-\Big(\frac{c}{t-1}-\frac{a+b-1}{t(t-1)}-\frac{2}{t}\Big)w'+\frac{ab}{t^2(t-1)}w=0.$$

То есть $t=0$ (или, что тоже самое $z=\infty$) – особая точка для коэффициентов уравнения.

Одно из решений гипергеометрического уравнения нам известно. Построим второе решение, линейно независимое первому. Будем полагать, что $|z| < 1$. Вычислим вронскиан $W(z)$ двух линейно независимых решений.

$$\frac{dW}{dz} = \frac{c - (a+b+1)z}{z(z-1)} W.$$

Решение этого уравнения:

$$W(z) = W_0 \exp(\int \frac{c-(a+b+1)z}{z(z-1)} dz).$$

Интеграл:

$$\int \frac{c-(a+b+1)z}{z(z-1)} dz = c \ln|z-1| - c\ln|z| - (a+b+1)\ln|z-1| + \mathrm{const}.$$

Тогда

$$W(z) = W_0 z^{-c}(1-z)^{c-a-b-1}.$$

Второе решение получается стандартным путем – из формулы для вронскиана:

$$w_1 w_2' - w_1' w_2 = W(z)$$

или

$$w_2 = w_1 \int \frac{W(z)}{w_1(z)} dz.$$

Если $w_1(z) \equiv F(a,b,c,z)$, тогда:

$$w_2(z) = F(a,b,c,z) \int \frac{W_0 z^{-c}(1-z)^{c-a-b-1}}{F^2(a,b,c,z)} dz.$$

Выясним поведение w_2 в окрестности точки $z = 0$:

$$w_2(z) = W_0(1 + \frac{ab}{c} z + O(z^2)) \int \Big(\frac{z^{-c}(1+O(z))}{1+O(z)}\Big) dz =$$

$$= z^{1-c}(\mathrm{const} + O(z)).$$

То есть, линейно независимое к $F(a,b,c,z)$ решение гипергеометрического уравнения в нуле имеет точку ветвления порядка $1-c$.

Дальше кажется естественным искать решение w_2 в виде $w_2 = z^{1-c} f$. Подставив эту формулу в гипергеометрическое уравнение получим:

$$-c(1-c)z^{-1-c} f + 2(1-c)z^{-c} f' + \frac{c-(a+b+1)z}{z(1-z)}(1-c)z^{-c} f + z^{1-c} f'' +$$

$$+\frac{c-(a+b+1)z}{z(1-z)}f'z^{1-c}-\frac{ab}{z(1-z)}z^{1-c}f=0,$$

или

$$z^{1-c}f''+\Big[2(1-c)z^{-c}+\frac{c-(a+b+1)z}{z(1-z)}z^{1-c}\Big]f'+$$

$$+\Big[-c(1-c)z^{-1-c}+\frac{c-(a+b+1)z}{z(1-z)}z^{-c}(1-c)-\frac{ab}{z(1-z)}z^{1-c}\Big]f=0,$$

или

$$f''+\Big[2(1-c)z^{-1}+\frac{c-(a+b+1)z}{z(1-z)}\Big]f'-$$

$$-\Big[\frac{ab}{z(1-z)}+c(1-c)z^{-2}-\frac{c-(a+b+1)z}{z(1-z)}(1-c)z^{-1}\Big]f=0.$$

Последнее уравнение удобно записать в виде:

$$f''+\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)z}{z(1-z)}f'+\frac{\alpha\beta}{z(1-z)}f=0,$$

где $\alpha=1+a-c$, $\beta=1+b-c$, $\gamma=2-c$.

Итак, второе решение гипергеометрического уравнения (8) имеет вид:

$$w_2\equiv G(z)=z^{1-c}F(1+a-c,1+b-c,2-c).$$

Из этих построений можно сделать вывод, что несмотря на сингулярность коэффициентов гипергеометрического уравнения в окрестности точки $z=0$, можно построить два его линейно независимых решения с помощью степенных рядов по параметру z.

2.3 Окрестность точки $z=1$

Перепишем гипергеометрическое уравнение (8) в окрестности $z=1$. Для этого сделаем замену переменной $x=1-z$. Тогда уравнение примет вид:

$$w''-\frac{c-(a+b+1)(1-x)}{(1-x)x}w'=\frac{ab}{x(1-x)}w=0.$$

Это уравнение легко приводится к стандартному виду:

$$w''+\frac{-(c-a-b-1)-(a+b+1)x)}{(1-x)x}w'-\frac{ab}{x(x-1)}w=0.$$

Тогда одно из решений гипергеометрического уравнения – регулярное в окрестности $z=1$ – гипергеометрическая функция:

$$w_1=F(a,b,a+b+1-c,1-z).$$

Второе решение вычисляется так же, как и $G(z)$, оно имеет вид:

$$w_2 = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b, 1+c-c-b, 1-z).$$

Таким образом, функцию $F(a,b,c,z)$ – решение гипергеометрического уравнения, можно аналитически продолжить за круг $|z|=1$ с помощью двух других линейно независимых решений, регулярных в круге $|z-1| = 1$:

$$F(a,b,c,z) = AF(a,b,a+b+1-c,1-z) + \\ B(1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b, 1+c-a-b, 1-z). \tag{9}$$

Значение постоянной A можно определить, устремив в этой формуле z к нулю, значение постоянной B – устремив z к единице.

Формулу (9) иногда называют формулой связи.

2.4 Задача

Получить формулы аналитического продолжения $F(a,b,c,z)$ на всю комплексную плоскость и вычислить значения постоянных A, B во всех этих формулах.

2.5 Литература

При подготовке лекции использовались учебники

Ф.Олвер. Асимптотика и специальные функции, М., Наука, 1990.

Н.Н.Лебедев. Специальные функции и их приложения. Физматгиз, Москва, Ленинград, 1963.

Ф.Клейн. Развитие математики в XIX столетии. М.: Наука, 1974

3 Регулярные особые точки дифференциального уравнения

Классифицированы особые точки дифференциальных уравнений второго порядка.

3.1 Решение дифференциального уравнения в виде ряда

Уравнение второго порядка

$$y'' + a(z)y' + b(z)y = 0 \tag{10}$$

имеет аналитическое решение в окрестности точки $z = z_0$, если коэффициенты уравнения – голоморфные функции в окрестности этой точки. Более того, легко построить сходящийся ряд для решения этого уравнения в окрестности точки z_0. Напомним процедуру построения этого ряда. Для простоты будем считать, что $z_0 = 0$,

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n. \tag{11}$$

Будем искать решение в виде

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n. \tag{12}$$

Подставим формулы (11) и (12) в дифференциальное уравнение. Заранее известно, что решение уравнения – голоморфная функция, поэтому ряд для $y(z)$ можно почленно дифференцировать. После дифференцирования получим:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)y_n z^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \sum_{n=1}^{\infty} n y_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n = 0.$$

Объединим коэффициенты при одинаковых степенях z, в результате получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \left[(n+2)(n+1)y_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}(k+1)y_{k+1} + \sum_{k=0}^{n} b_{n-k} y_k\right] = 0.$$

Для решения этого уравнения надо приравнять к нулю выражение в квадратной скобке. Тогда для определения коэффициентов y_n получится рекурентная последовательность алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} 2y_2 + a_0 y_1 + b_0 y_0 &= 0, \\ 6y_3 + 2a_1 y_2 + a_1 y_1 + b_0 y_1 + b_1 y_0 &= 0, \\ &\ldots, \\ (n+1)(n+2)y_n + \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}(k+1)y_{k+1} + \sum_{k=0}^{n} b_{n-k} y_k &= 0, \\ &\ldots. \end{aligned}$$

Решение этой рекурентной системы уравнений содержит две произвольные постоянные. В качестве таковых можно выбрать, например, y_0 и y_1. Эти постоянные легко определить, если заданы условия Коши в точке $z = 0$. Можно показать, что полученный таким образом ряд для функции $y(z)$ сходится, и функция $y(z)$ является голоморфной в некоторой окрестности $z = 0$.

Замечание. Такой метод доказательства существования решения дифференциального уравнения называется методом Коши. Конечно, метод построения решения дифференциального уравнения в виде ряда был известен и до Коши. Коши исследовал вопрос о сходимости таких рядов.

3.2 Классификация особых точек дифференциального уравнения

Важным свойством, обеспечившим возможность построения решения уравнения (10) в виде сходящегося ряда, оказалась гладкость коэффициентов уравнения. Теперь кажется естественным вопрос, как построить решение в окрестности точки, где коэффициенты неголоморфны. Для этого рассмотрим уравнения вида:

$$y'' + f(z)y' + g(z)y = 0. \tag{13}$$

Здесь $z^s f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ и $z^t g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$ – голоморфные функции, t, s – натуральные числа.

Исходя из опыта построения голоморфного решения для уравнения с голоморфными коэффициентами, можно понять, что в классе голоморфных функций уравнение решить, вообще говоря, не удастся. Поэтому приходится расширять класс решений. Будем искать решения, допускающие при $z = 0$ точку ветвления конечного порядка. Тогда решение можно представить виде:

$$y = z^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n.$$

Здесь пока ряд будем понимать как формальный, то есть будем производить над ним действия, не заботясь о сходимости ни самого ряда, ни ряда, полученного почленным дифференцированием.

Подставим выражение для $y(z)$ в уравнение (31):

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)(\alpha+n-1)u_n z^{\alpha+n-2} + \sum_{n=-s}^{\infty} z^n f_n \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)u_n z^{\alpha+n-1} + \sum_{n=-t}^{\infty} g_n z^n \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^{n+\alpha} = 0.$$

Построение ряда $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ можно устроить, если потребовать, чтобы разложение правой части начиналось со степени z^{-2}. Для этого надо еще ограничить значения $s \leq 1$ и $t \leq 2$.

Особые точки уравнения (31), в которых коэффициенты уравнения можно представить в виде

$$(z-z_0)f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z-z_0)^n, \quad (z-z_0)^2 g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n (z-z_0)^n$$

называются *регулярными особыми точками*. Остальные особые точки – *иррегулярные особые точки*.

Пусть $s=1$, $t=2$, тогда уравнение можно переписать в виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big[(\alpha+n)(\alpha+n-1)u_n + (\alpha+n)f_0 u_n + \sum_{k=0}^{n-1} f_{n-k}u_k + g_0 u_n + \sum_{k=0}^{n-k} g_{n-k}u_k\Big] z^{\alpha+n-2} = 0.$$

Значение α определяется из уравнения при $z^{\alpha-2}$:

$$\alpha(\alpha-1) + f_0\alpha + g_0 = 0. \tag{14}$$

Это уравнение называется *определяющим уравнением*. Решения определяющего уравнения (α_1, α_2) называются *показателями особой точки*.

Дальше легко написать рекурентную систему уравнений для определения коэффициентов ряда $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$:

$$[(\alpha+n)(\alpha+n-1) + \alpha f_0 + g_0]u_n = -\sum_{k=0}^{n-1}\Big[f_{n-k}(\alpha+k) + g_{n-k}\Big]u_k.$$

Докажем, что построенный ряд сходится (см. Ф.Олвер, стр.148). Пусть ряды для $zf(z)$ и $z^2 g(z)$ сходятся в круге радиуса r. Обозначим $\rho < r$, пусть

$$K > \max_{|z|=\rho}|zf(z)|, \quad K > \max_{|z|=\rho}|z^2 g(z)|.$$

Тогда из интегральной формулы Коши следует:

$$|f_n| \leq K\rho^{-n}, \quad |g_n| \geq K\rho^{-n}.$$

Обозначим $s \equiv [|\alpha_1 - \alpha_2|]$ (здесь квадратные скобки означают целую часть). Обозначим $b_n = |u_n|$, при $n = 0, 1, \ldots, s$. При $n > s$:

$$n(n - |\alpha_1 - \alpha_2|)b_n = K \sum_{j=0}^{n-1} (|\alpha_1| + j + 1) b_j \rho^{j-n}. \tag{15}$$

Можно показать, что $|a_n| \leq b_n$. Если в (15) заменить n на $n-1$ и вычесть полученное уравнение из (15), можно получить уравнение для мажорирующих коэффициентов b_n:

$$\rho n(n - |\alpha_1 - \alpha_2|)b_n - (n-1)(n-1-|\alpha_1 - \alpha_2|)b_{n-1} = K(|\alpha_1| + n)b_{n-1},$$

при $n \geq s + 2$. Разделим обе части на $n^2 b_n$, при $s \to \infty$ получим:

$$b_{n-1}/b_n \to \rho.$$

Это означает, что радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, а с ним и ряда для решения уравнения (31), равен ρ. Так как ρ можно взять сколь угодно близко к r, то и ряд для $u(z)$ сходится внутри круга радиуса r.

Замечание. Могут возникнуть трудности при построении этим методом двух линейно независимых решений уравнения в регулярной особой точке, если $\alpha_1 - \alpha_2 \in \mathbf{Z}$. В этом случае второе решение можно построить с помощью известного приема – используя формулу для вронскиана двух линейно независимых решений уравнения второго порядка.

3.3 Показатели особых точек гипергеометрического уравнения

Рассмотрим гипергеометрическое уравнение:

$$w'' + \frac{(c - (a+b+1)z)}{z(z-1)} w' - \frac{ab}{z(z-1)} w = 0.$$

Особые точки этого уравнения $z = 0$, $z = 1$ и $z = \infty$. В частности, в окрестности бесконечно удаленной особой точки $z = 1/t$ и уравнение имеет вид:

$$w'' - \left(\frac{c}{t-1} - \frac{a+b-1}{t(t-1)} - \frac{2}{t}\right) w' + \frac{ab}{t^2(t-1)} w = 0.$$

Вычислим показатели этих особых точек. В окрестности особой точки $z = 0$ определяющее уравнение:

$$\alpha(\alpha - 1) + c\alpha = 0.$$

Решения этого определяющего уравнения: $\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1 - c.$

Определяющее уравнение в точке $z = 1$ имеет вид:

$$\alpha(\alpha - 1) + (a + b + 1 - c)\alpha = 0,$$

его решения $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = c - a - b.$

Для того, чтобы написать определяющее уравнение в точке $z = \infty$ надо переписать уравнение относительно новой переменной Определяющее уравнение:

$$\alpha(\alpha - 1) - \alpha(-a - b + 1 - 2) + ab = 0,$$

или

$$\alpha^2 - \alpha(a + b) + ab = 0.$$

Его решения $\alpha_1 = a, \quad \alpha_2 = b.$

Итак, гипергеометрическое уравнение в регулярных особых точках $z = 0$, $z = 1$ и $z = \infty$ имеет показатели $(0, 1 - c),\ (0, c - a - b),\ (a, b)$.

3.4 Задача

Построить и исследовать второе решение уравнения в окрестности регулярной особой точки, если $\alpha_1 - \alpha_2 \in \mathbf{N}$.

3.5 Литература

При подготовке лекции использовались учебники

Ф.Олвер. Асимптотика и специальные функции, М., Наука, 1990.

Н.Н.Лебедев. Специальные функции и их приложения. Физматгиз, Москва, Ленинград, 1963.

Ф.Клейн. Развитие математики в XIX столетии. М.: Наука, 1974

4 Функция Бесселя

Построен сходящийся ряд функции Бесселя. Выведено разностное уравнение для функций Бесселя разных порядков. Получено интегральное представление и асимптотика функции Бесселя в бесконечно удаленной точке.

4.1 Уравнение Бесселя

Уравнение Бесселя имеет вид:

$$w'' + \frac{1}{z}w' + (1 - \frac{\nu^2}{z^2})w = 0. \tag{16}$$

Легко видеть, что это уравнение имеет регулярную особую точку $z = 0$. Определяющее уравнение в этой точке

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - \nu^2 = 0.$$

Показатели этой регулярной особой точки $\alpha_{1,2} = \pm\nu$. Следовательно, в окрестности $z = 0$ можно построить решение уравнения (20) в виде:

$$w = z^{\pm\nu} \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n,$$

если $\nu \notin \mathbb{Z}$.

Вычислим коэффициенты ряда для решения уравнения Бесселя. Для определенности будем строить функцию, соответствующую показателю $\nu > 0$.

Подставим формулу

$$w(z) = z^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n$$

в уравнение Бесселя. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях z. В результате получим:

$$(2\nu w_1 + w_1)z^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \Big[(2\nu n + (n-1)n + n)w_n + w_{n-2}\Big] z^{n-2} = 0.$$

Система уравнений для определения коэффициентов w_n:

$$2\nu w_1 + w_1 = 0,$$
$$(2\nu + k)k w_n + w_{n-2} = 0.$$

Отсюда следует, что все нечетные коэффициенты равны нулю. Поэтому можно сделать замену $k = 2n$, тогда:

$$w_k = -\frac{w_{k-1}}{(\nu+k)4k}.$$

Функция $w(z)$ имеет вид:

$$w(z) = z^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\Big(\frac{z^2}{4}\Big)\frac{w_0}{(\nu+k)(\nu+k-1)\dots\nu}.$$

В этой формуле воспользуемся гамма-функцией для представления произведения в знаменателе, кроме того, сделаем нормировку

$$w_0 = \Big(\frac{1}{2}\Big)^{\nu}\frac{1}{\Gamma(\nu)}.$$

Построенная таким образом функция имеет вид:

$$J_{\nu}(z) = \Big(\frac{z}{2}\Big)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\Big(\frac{z^2}{4}\Big). \tag{17}$$

Эта функция называется *функцией Бесселя.* Параметр ν называется порядком функции Бесселя, z– аргументом.

Воспользовавшись признаком Даламбера для сходимости рядов, легко видеть, что ряд сходится. Если ν – целое положительное число, тогда и функция Бесселя – целая функция.

Если $\nu \notin \mathbb{Z}$, тогда функция Бесселя имеет точку ветвления $z = 0$. Главная ветвь функции Бесселя определяется главной ветвью функции z^{ν}. Связь различных ветвей функции Бесселя дает формула:

$$J_{\nu}(z\exp(2i\pi m)) = \exp(2i\pi m\nu)J_{\nu}(z).$$

4.2 Разностное уравнение

Выясним, как связаны друг с другом функции Бесселя различных порядков. Для этого воспользуемся единственным, что у нас есть – представлением функции Бесселя (17).

$$J_{\nu-1}(z) = \Big(\frac{z}{2}\Big)^{\nu-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k)}\Big(\frac{z^2}{4}\Big)^{k}.$$

Здесь заменим гамма-функцию по формуле

$$\Gamma(\nu+k+1) = (\nu+k)\Gamma(\nu+n).$$

Тогда получим цепочку равенств:

$$J_{\nu-1}(z) = \left(\frac{2}{z}\right)\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\nu+k)}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{z^2}{4}\right) =$$
$$\nu\left(\frac{2}{z}\right)J_\nu(z) + \left(\frac{2}{z}\right)^{\nu+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k-1)!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{z^2}{4}\right)^{k-1}.$$

В результате:

$$J_{\nu-1} = \frac{2\nu}{z}J_\nu - J_{\nu+1}. \qquad (18)$$

Это и есть искомая формула, связывающая функции Бесселя различных порядков.

4.3 Интегральное представление

Для того, чтобы получить интегральное представление функции Бесселя, воспользуемся формулой (18). В этой формуле перейдем к образам Лапласа $\tilde{J}$. Преобразование Лапласа сделаем по порядковой переменной ν. В результате уравнение (18) для образов Лапласа примет вид:

$$\exp(-p)\tilde{J} = \frac{2}{z}\tilde{J}' - \exp(p)\tilde{J}.$$

или

$$\tilde{J}' = z\cosh(p)\tilde{J}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Решив его, получим:

$$\log\tilde{J} = z\sinh(p) + C,$$

или

$$\tilde{J} = C\exp(z\sinh(p)).$$

Прообраз – функция Бесселя – может быть представлена в виде:

$$J = C\int_\gamma \exp(z\sinh(p))\exp(-p\nu)dp.$$

Здесь, правда, пока еще не определена постоянная C и контур интегрирования. Значение постоянной мы получим ниже. Контур интегрирования должен обходить одну или несколько особых точек подынтегральной функции, так чтобы его с помощью непрерывной деформации нельзя было стянуть в точку (такое требование обеспечивает, что интеграл не равен нулю тождественно). Для определения контура интегрирования удобно заменить переменную интегрирования: $\exp(p) = -t, \;\; -dt = \exp(p)dp$. Тогда интеграл примет вид:

$$J_\nu(z) = C\int_\gamma \exp\left(\frac{z}{2}(t - \frac{1}{t})\right)\frac{dt}{t^{\nu+1}}.$$

В этом интеграле точка $t = 0$ – точка ветвления. Поэтому, если мы возьмем в качестве контура интегрирования петлю, приходящую с $-\infty + i0$, обходящую вокруг точки $t = 0$ по часовой стрелке и уходящую обратно на $-\infty - i0$, тогда такой контур не сможет быть непрерывно стянут в точку, и следовательно, интеграл не равен тождественно нулю. В результате получим:

$$J_\nu(z) = C\int_{-\infty}^{(+0)} \exp\left(\frac{z}{2}(t - \frac{1}{t})\right)\frac{dt}{t^{\nu+1}}.$$

Этот интеграл сходится при $\Re(z) \geq 0$.

Теперь займемся определением значения постоянной C. Для этого рассмотрим Функцию Бесселя порядка $\nu = 0$. Воспользовавшись рядом для функции Бесселя, легко посчитать ее значение: $J_0(0) = 1$.

При $\nu \in \mathbb{Z}$ нет никакого разреза в комплексной плоскости. Подынтегральные функции голоморфны всюду, за исключением точки $t = 0$. Поэтому интеграл по петле в представлении функции Бесселя можно деформировать в интеграл по любой окружности вокруг точки $t = 0$:

$$J_\nu = C\int_\gamma \exp\left(\frac{z}{2}(t - \frac{1}{t})\right)\frac{dt}{t^{\nu+1}},$$

где γ – окружность произвольного радиуса вокруг точки $t = 0$. Этим представлением воспользуемся для вычисления постоянной C:

$$J_0(0) = C\int_\gamma \frac{dt}{t^1} = C2i\pi = 1.$$

Следовательно,

$$C = \frac{1}{2i\pi}.$$

Окончательно:

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{(+0)} \exp\left(\frac{z}{2}(t - \frac{1}{t})\right)\frac{dt}{t^{\nu+1}}. \tag{19}$$

Как уже отмечалось, этот интеграл сходится при $\Re(z) \geq 0$. Его можно преобразовать к виду, пригодному для любых значений z. Для этого сделаем замену: $zt = l$, тогда

$$t = \frac{l}{z}, \quad \frac{1}{t} = \frac{z}{l},$$

и

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2i\pi} z^\nu \int_{-\infty}^{(+0)} \exp\left(\frac{l}{2} - \frac{z^2}{2l}\right) \frac{dl}{l^{\nu+1}}.$$

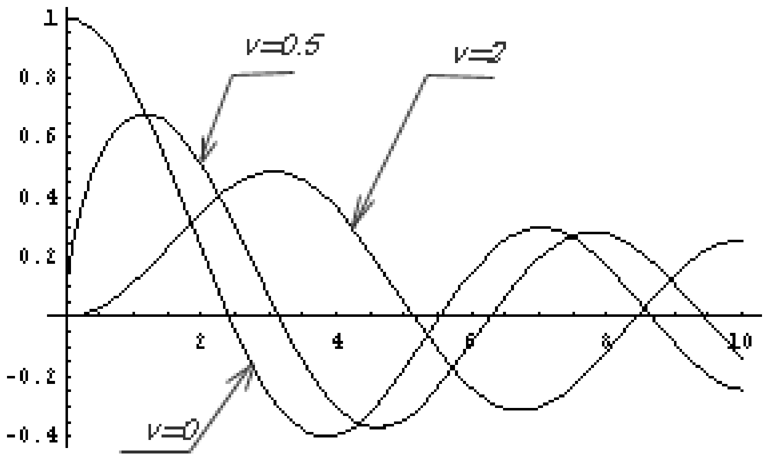

Рис. 3: Функции Бесселя.

4.4 Асимптотика функции Бесселя

Здесь приведена формула для асимптотики функции Бесселя при больших значениях модуля аргумента. Для получения асимптотической формулы воспользуемся интегральным представлением. Вообще говоря, для вычисления асимптотики интеграла в функции Бесселя обычно пользуются методом перевала. Однако, для простоты мы не будем привлекать метод перевала, а воспользуемся методом стационарной фазы, хотя, конечно, здесь это окажется одним и тем же.

Преобразуем контур интегрирования к интегралу по мнимой оси. Для этого надо деформировать ветви интеграла по петле – с верхнего берега разреза на верхнюю мнимую полуось, с нижнего берега разреза – на нижнюю мнимую полуось. Это можно сделать, так как подынтегральная функция голоморфна в конечной области левой полуплоскости комплексного параметра t, а интеграл при больших значениях t в левой полуплоскости экспоненциально убывает. Таким образом, справедлива формула:

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{(+0)} \exp\big(\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})\big)\frac{dt}{t^{\nu+1}} = \frac{1}{2i\pi}\int_L \exp\big(\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})\big)\frac{dt}{t^{\nu+1}},$$

где L – контур, проходящий по мнимой оси от минус бесконечности до плюс бесконечности и обходящий точку $t=0$ по малой окружности справа.

В полученном интервале сделаем замену переменной $it = x$, тогда интеграл примет вид:

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2i\pi}\exp(i(\nu+1)\pi/4)\int_M \exp\big(\frac{iz}{2}(x-\frac{1}{x})\big)\frac{dx}{x^{\nu+1}},$$

где контур M лежит на вещественной оси всюду, за исключением малой окрестности точки $x=0$, которую он обходит по половинке окружности в верхней полуплоскости x.

Для вычисления асимптотики этого интеграла можно воспользоваться методом стационарной фазы. Применяя известные формулы, получим:

$$J_\nu(z)|_{|z|\to\infty} = \frac{1}{2\pi}\sum_{\pm}\exp(\pm iz)\sqrt{\frac{2\pi}{z}}\exp(\pm i\pi/4 - \pi\nu/2)(1+O(|z|^{-1}) =$$
$$\sqrt{\frac{12}{\pi z}}\Big(\cos(z-\pi\nu/2-\pi/4) - \sin(z-\pi\nu/2-\pi/4)\Big)(1+O(|z|^{-1}).$$

4.5 Задача

Исследовать возможность обхода точки $t=0$ в интегральном представлении функции Бесселя по мнимой оси справа.

4.6 Литература

При подготовке лекции частично использовалась книга

Ф.Олвер. Асимптотика и специальные функции, М., Наука, 1990.

5 Явление Стокса

Строго говоря, явление Стокса имеет отношение к асимптотическим рядам для специальных функций, а не к самим специальным функциям. Однако, часто функции определяются с помощью рядов и, в частности, рядов асимптотических. В такой ситуации обсуждение явления Стокса выглядит вполне уместным. В этой лекции функции Ганкеля вводятся через их асимптотики в комплексной плоскости и обсуждается асимптотическое поведение этих функций в окрестности точки ветвления бесконечного порядка.

Проще всего понять явление Стокса на примере решений уравнения

$$u'' - u = 0.$$

Функция $u = \mathrm{ch}(z)$ – решение этого уравнения.

Асимптотика этого решения при $|z| \to \infty$ в секторе $\Re(z) > 0$:

$$u \sim \exp(z)/2,$$

в секторе $\Re(z) < 0$:

$$u \sim \exp(-z)/2.$$

То есть асимптотика меняется скачком при непрерывном изменении $\mathrm{Arg}z$. В этом, собственно, и состоит явление Стокса. Показав этот пример, можно было бы и закончить лекцию – тема по большому счету исчерпана. Однако, это далеко не так. Приведенное уравнение слишком просто и при исследовании асимптотик его решений оказываются незамеченными, например, такие важные в общем подходе элементы, как коэффициенты Стокса (здесь это тождественные единицы). Поэтому перейдем к исследованию несколько более сложного примера.

5.1 Формальные решения в виде асимптотических рядов

Исследуем поведение решений уравнения Бесселя

$$w'' + \frac{1}{z}w' + (1 - \frac{\nu^2}{z^2})w = 0. \tag{20}$$

в окрестности иррегулярной особой точки $z = \infty$. На предыдущей лекции была написана асимптотика функций Бесселя в окрестности бесконечно удаленной точки. Характер асимптотического представления можно понять из тех асимптотических формул:

$$w(z) \sim \exp(\pm iz)\sqrt{\frac{1}{z}}\sum_{n=0}^{\infty} w_n z^{-n}.$$

Здесь не используется знак равенства, потому что пока не исследован вопрос о сходимости представления $w(z)$, ряд понимается как формальный.

Для вычисления коэффициентов w_n надо подставить ряд в уравнение, приравнять коэффициенты при одинаковых степенях z. В результате получится рекурентная система уравнений, из которой можно определить коэффициенты разложения w_n. Здесь эти действия пропущены, так как они уже не раз проводились и для уравнения Бесселя, и для гипергеометрического уравнения. Вместо вычислений приведем сразу ответ:

$$w_n = \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-3^2)\dots(4\nu^2-(2n-1)^2)}{n!8^n}.$$

Исследуем сходимость написанного ряда:

$$\frac{w_{n+1}}{w_n}|_{n\to\infty} \sim n.$$

То есть, ряд не сходится ни при каких значениях z.

Таким образом, воспользовавшись стандартной процедурой, можно получить два формальных ряда, которые являются формальными решениями уравнения Бесселя, но не сходятся и, следовательно, не представляют никакого настоящего решения уравнения Бесселя. С другой стороны, можно надеяться, что эти ряды являются асимптотичесикми представлениями каких-то функций, которые, в свою очередь являются решениями уравнения Бесселя.

5.2 Обоснование асимптотик

Прежде, чем как-либо использовать построенные формальные ряды, выясним, во-первых,– есть ли такие функции, которые приближаются построенными рядами, во-вторых, – область значений комплексного параметра z, для которой пригодны построенные приближения. Стандартный подход в этом случае следующий.

Возьмем отрезок формального ряда длиной N:

$$L_N = \exp(\pm iz)\sqrt{\frac{1}{z}}\sum_{n=0}^{N} w_n z^{-n}.$$

Будем искать решение в виде:

$$w = L_N + u(z).$$

Здесь неизвестная функция u называется остатком асимптотики. Подставим формулу для w в уравнение. В результате получим уравнение для неизвестной функции $u(z)$:

$$u'' + \frac{1}{z}u' + (1 - \frac{\nu^2}{z^2})u = -L'_N, \tag{21}$$

где L'_n– результат применения дифференциального оператора (левой части уравнения Бесселя) к куску ряда L_n. Непосредственно из построения следует, что правая часть в уравнении (21) имеет вид:

$$-L'_N = \exp(iz)A_N z^{-N-2-1/2},$$

где A_N – постоянная.

Малые при $z \to \infty$ слагаемые в уравнении для $u(z)$ перенесем в правую часть. В результате получим:

$$u'' + u = -\frac{u'}{z} + \frac{\nu^2 u}{z^2} - L'_N.$$

Теперь удобно перейти от дифференциального уравнения к интегральному уравнению для $u(z)$:

$$u(z) = -\exp(iz)\int_z^\infty d\zeta \exp(-i\zeta)\Big[-\frac{u'}{\zeta} + \frac{\nu^2 u}{\zeta^2} - L'_N\Big] -$$
$$\exp(-iz)\int_z^\infty d\zeta \exp(i\zeta)\Big[-\frac{u'}{\zeta} + \frac{\nu^2 u}{\zeta^2} - L'_N\Big].$$

В этом уравнении надо определить какой-нибудь путь интегрирования. С одной стороны может показаться, что это не так уж и важно, потому что в подынтегральные функции аналитические, а бесконечно удаленная точка на комплексной плоскости единственная. Однако, это не совсем так. Важно определить линию, по которой происходит подход к бесконечно удаленной точке. Ведь бесконечно удаленная точка – существенно особая для подынтегральной функции. Чтобы проще всего было оценивать интеграл, естественно выбрать путь, на котором подынтегральная экспонента быстрее всего убывает. Для этого подставим в явном виде выражение для L'_N:

$$u(z) = -\exp(iz)\times$$
$$\times\int_z^\infty d\zeta \exp(-i\zeta)\Big[-\frac{u'}{\zeta} + \frac{\nu^2 u}{\zeta^2} - \exp(i\zeta)A_N\zeta^{-N-2-1/2}\Big] -$$
$$\exp(-iz)\int_z^\infty d\zeta \exp(i\zeta)\Big[-\frac{u'}{\zeta} + \frac{\nu^2 u}{\zeta^2} - \exp(i\zeta)A_N\zeta^{-N-2-1/2}\Big].$$

Из приведенной формулы видно, что надо уходить в бесконечность по положительной части мнимой оси, в этом случае, по крайней мере известные слагаемые связанные с L'_N убывают быстрее всего. О неизвестной функции $u(\zeta)$ пока ничего определенного сказать нельзя.

Что касается конечной области параметра $|\zeta| > 0$ – здесь важно, чтобы на линии интегрирования не росла вещественная часть подынтегральной экспоненты. В этом случае ее легко оценить, с ней и оценить интеграл:

$$|\exp(-iz)\int_z^{i\infty} d\zeta \exp(2i\zeta)A_N\zeta^{-N-2-1/2}| \leq |\exp(iz)\zeta^{-N-3/2}\mathrm{const}|. \qquad (22)$$

При интегрировании, еще важно не приближаться к нулю, там точка ветвления да еще и особенность. Если не удается построить путь интегрирования, на котором вещественная часть показателя экспоненты при движении к $i\infty$ не растет, это значит, что интеграл оценивается экспонентой с показателем, вещественная часть которого больше, чем $2iz$. Следовательно, не удастся при оценке интеграла получить множитель $\exp(iz)$ важный для дальнейших оценок.

Итак, в случае, если можно провести путь интегрирования и точки z к $i\infty$ так, что на нем вещественная часть экспоненты в интеграле (22) не возрастает, имеем:

$$u(z) = -\exp(iz)\int_z^{\infty} d\zeta \exp(-i\zeta)\Big[-\frac{u'}{\zeta}+\frac{\nu^2 u}{\zeta^2}\Big]$$
$$-\exp(-iz)\int_z^{\infty} d\zeta \exp(i\zeta)\Big[-\frac{u'}{\zeta}+\frac{\nu^2 u}{\zeta^2}\Big] + F(z),$$

где

$$|F(z)| \leq |\exp(iz)z^{-N-3/2}\mathrm{const}|.$$

Теперь вспомним, что на самом деле точка ∞ – существенно особая точка, точка ветвления бесконечного порядка. Дальше, рассматривая z как точку на римановой поверхности функции логарифм, легко понять, что требуемые для оценки (22) условия на путь интегрирования выполняются только для точек, z, достаточно удаленных от нуля и таких, что $-\pi < \mathrm{Arg}(z) < 2\pi$.

Пусть z удовлетворяет этим условиям, тогда методом последовательных приближений можно показать, что для решения интегро-дифференциального уравнения – функции $w(z)$ справедлива оценка:

$$w(z) = O(\exp(iz)z^{-N-3/2}).$$

То есть, построенный в предыдущем пункте ряд является асимптотическим рядом для некоторой функции $u(z)$ – решения уравнения Бесселя.

5.3 Функции Ганкеля

Для удобства обычно устраивают нормировку полученных рядов, умножая их на

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp(\pm(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4})i\pi).$$

Функции, асимптотики которых были построены называются функциями Ганкеля. Эти функции определяются их асимптотическими представлениями в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$H_\nu^{(1)}(z)\sim\exp(i\zeta)\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sum_{n=0}^{\infty}i^n w_n z^{-n},\ \ -\pi+\delta\le \mathrm{Arg}z\le 2\pi-\delta, \tag{23}$$

$$H_\nu^{(2)}(z)\sim\exp(-i\zeta)\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n w_n z^{-n},\ \ -2\pi+\delta\le \mathrm{Arg}z\le \pi-\delta, \tag{24}$$

при $z\to\infty$, $\zeta=z-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}$, $\delta>0$.

5.4 Явление Стокса.

Функции Ганкеля, так же, как и функции Бесселя, – линейно независимые решения уравнения Бесселя. Поэтому функции Бесселя можно выразить через функции Ганкеля, для этого достаточно вспомнить асимтпотику функций Бесселя при $|z|\to\infty$:

$$J_\nu(z)=\frac{1}{2}(H_\nu^{(1)}(z)+H_\nu^{(2)}(z)).$$

$$J_{-\nu}(z)=\frac{1}{2}(H_\nu^{(1)}(z)+H_\nu^{(2)}(z))=$$
$$\frac{1}{2}(\exp(\nu\pi i)H_\nu^{(1)}(z)+\exp(-\nu\pi i)H_\nu^{(2)}(z)).$$

Из этих формул можно исключить $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z))$. В результате получим:

$$H_\nu^{(1)}(z)=\frac{1}{\sin(\nu\pi)}(\exp(-\nu\pi i)J_\nu(z)+J_\nu(z)),$$
$$H_\nu^{(2)}(z))=-\frac{1}{\sin(\nu\pi)}(\exp(i\pi\nu)J_\nu(z)-J_{-\nu}(z)).$$

Дальше для вычисления функции Ганкеля при повороте аргумента на угол πim можно воспользоваться формулами для поворота аргумента в функции Бесселя:

$$J_\nu(z\exp(im\pi))=\exp(im\nu\pi)J_\nu(z).$$

Эта формула и выражение функции Бесселя через функцию Ганкеля дает:

$$H_\nu^{(1)}(z\exp(im\pi)) =$$
$$\frac{-1}{\sin(\nu\pi)}[\sin((m-1)\nu\pi)H_\nu^{(1)}(z) + \exp(-i\nu\pi)\sin(m\nu\pi)H_\nu^{(2)}(z)],$$
$$H_\nu^{(2)}(z\exp(im\pi)) =$$
$$\frac{1}{\sin(\nu\pi)}[\exp(i\nu\pi)\sin(m\nu\pi)H_\nu^{(1)}(z) + \sin((m+1)\nu\pi)H_\nu^{(2)}(z)].$$

Проиллюстрируем полученные формулы. Для этого возьмем $m = 2$, тогда

$$H_\nu^{(1)}(z\exp(2i\pi)) = -H_\nu^{(1)}(z) - (1 + \exp(-2\nu\pi))H_\nu^{(2)}(z),$$

когда $|\mathrm{Arg}z| \leq \pi - \delta$ верно и это представление, и представление (23), правда, в этой области функция $H_\nu^{(2)}(z)$ экспоненциально мала, так что при построении асимптотики главная часть разложения определяется в (23).

Вывод. При переходе от сектора к сектору аргумент функции меняется непрерывно, а коэффициенты асимптотического разложения для этой функции меняются дискретно. В этом и состоит *явление Стокса.* Коэффициенты в асимптотическом представлении, меняющиеся скачкообразно, называются *коэффициентами Стокса.* Лучи, на которых происходит смена коэффициентов в асимптотическом разложении, называются *линии Стокса.* Лучи, на которых растущая и убывающая асимптотики меняются местами, называются *антистоксовми линиями.*

5.5 Задача

Завершить доказательство близости асимптотического ряда к некоторому решению уравнения Бесселя.

5.6 Литература

При подготовке лекции частично использовалась книга

Ф.Олвер. Асимптотика и специальные функции, М., Наука, 1990.

6 Функция Вейерштрасса

Здесь $\mathcal{P}$-функция Вейерштрасса введена, как решение уравнения первого порядка на римановой поверхности рода 1. Показано, что эта функция двоякопериодическая. Приводится терема Лиувилля для эллиптической функции.

6.1 Дифференциальное уравнение

В этой лекции будет изучаться решение дифференциального уравнения первого порядка

$$(u')^2 = 4u^3 - g_2 u - g_3. \tag{25}$$

Оно появляется, например, если начать интегрировать уравнение второго порядка с квадратичной нелинейностью

$$u'' = 6u^2 - g_2/2.$$

Разделить переменные в уравнении (25) просто:

$$dz = \frac{\pm du}{\sqrt{4u^3 - g_2 u - g_3}}.$$

Следующий этап – проинтегрировать уравнение с разделенными переменными. Вот здесь есть некоторая неясность. Во первых,– что означает $\pm$? Какой из знаков выбрать? Параметр u лежит на двулистной римановой поверхности, по какому пути на этой поверхности проводить путь интегрирования? Перейдем к ответам на эти вопросы.

Для однозначного определения решения нелинейного уравнения первого порядка, зачастую (у нас именно такой случай), недостаточно задать только значение функции u в какой-либо точке, необходимо еще задать знак $+$ или $-$, то есть, выбрать лист римановой поверхности (это условие лишнее только в точках ветвления). То есть, данные Коши:

$$z = z_0, \quad u|_{z_0} = u_0, \quad \text{знак перед корнем.}$$

Выберем для простоты в качестве начальной – точку ветвления $z = \infty$. В этом случае, по крайней мере формально, получим:

$$z = -\int_u^\infty \frac{d\zeta}{\sqrt{4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3}}.$$

Функция $u = \mathcal{P}(z)$, обратная к этому эллиптическому интегралу, называется $\mathcal{P}$-функцией Вейерштрасса:

6.2 Двоякопериодичность

Вообще говоря, если хочется получить решение уравнения, то все равно, по какому пути на римановой поверхности интегрировать. Но на самомто деле не все пути эквивалентны. Обозначим e_1, e_2, e_3 корни кубического полинома

$$4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3 = 0.$$

Определенности будем считать, что e_3 – вещественный корень. Соединим разрезом на римановой поверхности e_1 и e_2, e_3 и ∞. Цикл на верхнем листе поверхности, обходящий отрезок $[e_1, e_2]$, назовем a- периодом. Цикл, соединяющий два разреза и проходящий по верхнему и нижнему листу поверхности – b- периодом.

Можно усмотреть, что любой путь γ на римановой поверхности можно представить в виде пути, не обходящего полностью ни один цикл g', и сумму конечного числа обходов по a и b циклам.

$$\gamma = \gamma' + am + bn, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Это означает, что функция Вейерштрасса – двоякопериодическая, а числа

$$2\omega_1 = \int_a \frac{d\zeta}{\sqrt{4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3}}, \quad 2\omega_2 = \int_b \frac{d\zeta}{\sqrt{4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3}}$$

– периоды этой функции, то есть:

$$\mathcal{P}(z + m\omega_1 + n\omega_2) = \mathcal{P}(z).$$

Конечно, если бы отношение этих двух чисел было вещественным, то ни какой двоякопериодичности не могло бы идти и речи – вещественный период у функции может быть только один. Однако, здесь отношение периодов – число комплексное. Покажем это. Во-первых, интеграл по a-циклу легко деформировать в интеграл вокруг разреза по вещественной оси от $[e_3, \infty)$. При этом, правда, остается еще интеграл по большой окружности на верхнем листе римановой поверхности, но он равен нулю из-за убывания подынтегральной функции при $|z| \to \infty$. Интеграл по верхнему и нижнему берегам разреза $[e_3, \infty)$– вещественный из-за вещественности подынтегрального выражения. Также легко показать, что интеграл по циклу b чисто мнимый. В результате получаем: отношение периодов ω_1/ω_2 – комплексное число.

Из-за двоякопериодичности эту функцию достаточно изучить в прямоугольнике $0 \le \Re(z) < 2\omega_1$, $0 \le \Im(z) < 2\omega_2$. Этот прямоугольник иногда называется *многообразием Якоби*.

6.3 Представление в виде ряда

При $z \to 0$ значение функции Вейерштрасса $u \to \infty$. Причем, воспользовавшись интегральным представлением, легко получить:

$$z \sim \frac{1}{\sqrt{u}}, \quad \text{или} \quad u \sim \frac{1}{z^2}.$$

Так как функция Вейерштрасса периодическая, следовательно так же она ведет себя во всех точках $z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2$, тогда:

$$\mathcal{P}(z) \sim \sum_{m,n} \frac{1}{(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2)^2} + \text{регулярная часть.}$$

Регулярная часть – периодическая и ограниченная функция во всей комплексной плоскости, следовательно, она может быть равна только постоянной.

Однако, легко заметить, что написанный ряд расходится. Показать это можно, воспользовавшись интегральным признаком сходимости:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{((z + 2N\omega_2) + 2m\omega_2)^2} \sim \int_0^{\infty} \frac{dm}{((z + 2N\omega_2) + 2m\omega_2)^2} =$$

$$= \frac{1}{z + 2N\omega_1}.$$

По N полученное выражение уже не суммируется.

Расходящийся ряд можно регуляризовать, выкинув расходящуюся часть:

$$\mathcal{P}(z) = \sum_{m,n} \left[\frac{1}{(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2)^2} - \frac{1}{(2m\omega_1 + 2n\omega_2)^2}\right]. \tag{26}$$

Этот ряд сходится и его сумма и есть $\mathcal{P}$-функция Вейерштрасса.

6.4 Четность

Ряд для производной $\mathcal{P}'(z)$ легко получить почленным дифференцированием формулы (26):

$$\mathcal{P}'(z) = -2 \sum_{m,n} \frac{1}{(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2)^3}.$$

Заменим z на $-z$ в этой формуле. В результате простых преобразований:

$$\mathcal{P}'(-z) = -2 \sum_{m,n} \frac{1}{(-z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2)^3} =$$

$$= 2\sum_{m,n} \frac{1}{(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2)^3} = -\mathcal{P}'(z).$$

Вывод – производная функции Вейерштрасса – нечетная функция.

Так же, используя представление в виде ряда для $\mathcal{P}(z)$ легко увидеть:

$$\mathcal{P}(-z) = \mathcal{P}(z),$$

то есть, функция Вейерштрасса – четная.

6.5 Связь между ω_1, ω_2 и параметрами уравнения

Представим $\mathcal{P}(z)$ в виде ряда по степеням z:

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + u_2 z^2 + \dots .$$

Если эту формулы подставить в уравнение, тогда после несложных преобразований можно получить:

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20} z^2 + \frac{g_3}{28} z^4 + \dots ,$$

где

$$g_2 = 60 \sum_{m,n \neq 0} \frac{1}{(2m\omega_1 + 2n\omega_2)^4}, \quad g_3 = 140 \sum_{m,n \neq 0} \frac{1}{(2m\omega_1 + 2n\omega_2)^6}.$$

6.6 Теорема Лиувилля

Теорема Лиувилля – это во многом теорема Коши, примененная к эллиптическим функциям:

Теорема. Пусть $F(z)$ – эллиптическая функция. Сумма всех вычетов этой функции относительно всех ее полюсов равна нулю.

Перейдем к доказательству этого утверждения. Будем рассматривать $F(z)$ в параллелограмме периодов Ω_1 и Ω_2 таком, что на сторонах этого параллелограмма $F(z)$ регулярна. Тогда интеграл по границе параллелограмма периодов:

$$\int_Q F(z)dz = \int_c^{c+\Omega_1} F(z)dz + \int_{c+\Omega_1}^{c+\Omega_1+\Omega_2} F(z)dz + \int_{c+\Omega_1+\Omega_2}^{c+\Omega_2} F(z)dz + \int_{c+\Omega_2}^{c} F(z)dz.$$

В этой формуле из-за периодичности подынтегральной функции второй и третий интегралы можно переписать в виде интегралов по отрезкам $[c, c+\Omega_2]$ и $[c+\Omega_2, c]$. В результате получим:

$$\int_Q F(z)dz = \int_c^{c+\Omega_1} F(z)dz + \int_c^{c+\Omega_2} F(z)dz + \int_{c+\Omega_1}^{c} F(z)dz + \int_{c+\Omega_2}^{c} F(z)dz.$$

Подынтегральные функции одинаковы, а направление интегрирования разное. Это приводит к формуле:

$$\int_Q F(z)dz = 0.$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекают несколько важных следствий.

Следствие 1. Число полюсов эллиптической функции с учетом их кратности не может быть меньше двух.

Следствие 2. Если вместо $f(z)$ рассматривать $\phi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)-a}$, где $a = \text{const}$, тогда число полюсов отличной от постоянной функции равно числу точек, где $f(z) = a$ для $\forall a$.

Следствие 3. Не существует отличной от постоянной эллиптической функции, регулярной в параллелограмме периодов.

6.7 Задача

Указать расположение нулей функции Вейерштрасса внутри прямоугольника периодов.

6.8 Литература

При подготовке к этой лекции использовались:

1. Н.И. Ахиезер, Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.

2. Уиттекер, Ватсон, Курс современного анализа, т.2.

7 Эллиптические функции Якоби

Исследована функция синус амплитуды комплексного аргумента. Выписаны приближенные представления этой функции при значениях параметра близких к нулю и единице.

7.1 Функция синус амплитуды

Название функции синус амплитуды видимо происходит из ее связи с решением уравнения математического маятника:

$$\phi'' + \sin(\phi) = 0. \tag{27}$$

Умножим уравнение на ϕ' и проинтегрируем по t, в результате получим:

$$\frac{1}{2}(\phi')^2 - \cos(\phi) = E. \tag{28}$$

Решение уравнения математического маятника можно записать в виде:

$$t + t_0 = \frac{1}{2}\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{ds}{\sqrt{\sin^2(\phi_0/2) - \sin^2(s/2)}}.$$

Эту формулу оказывается удобнее рассматривать, когда в подынтегральной функции под знаком корня вместо синуса есть полиномиальная зависимость от переменной интегрирования. Для перехода к такой записи можно сделать замену:

$$ku = \sin(s/2) \quad k = \sin(\phi_0/2).$$

Тогда

$$kdu = \frac{\cos(s/2)}{2}ds, \quad \text{или} \quad ds = \frac{2kdu}{\sqrt{1-k^2u^2}}.$$

Следовательно, решение уравнения математического маятника выражается через интеграл вида:

$$t = \int_0^{\frac{\sin(\phi/2)}{k}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}. \tag{29}$$

Теперь удобно рассматривать функцию, обратную интегралу, как новую специальную функцию.

$$u = \mathrm{sn}(t|k), \quad \text{где} \quad \sin(\phi/2) = u\sin(\phi_0/2).$$

Эта новая функция называется *синус амплитуды или синус Якоби.*

7.2 Периодичность

Функция $\mathrm{sn}(z|k)$ обратна интегралу

$$z = \int_0^y \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}. \tag{30}$$

Здесь параметр k – *(модуль эллиптической функции)* положительное число, не большее единицы. Интегрирование ведется по пути на двулистной римановой поверхности, определяющейся уравнением:

$$w^2 = (1-u^2)(1-k^2u^2).$$

Проведем на верхнем листе этой поверхности два разреза. Пусть один разрез проходит по отрезку $[-1,1]$, второй – соединяет точки $-1/k$ и $1/k$ через бесконечно удаленную точку и лежит на вещественной оси. Противоположные края разрезов склеим, как обычно, с противоположными краями таких же разрезов на нижнем листе. Устроим циклы на этой римановой поверхности. Пусть цикл a лежит на верхнем листе и окружает отрезок $[-1,1]$. Цикл b проходит по верхнему листу от точки ветвления 1 до точки ветвления $1/k$. Затем переходит на нижний лист и там проходит от $1/k$ до 1, где и возвращается на верхний лист поверхности.

Путь интегрирования по римановой поверхности в интеграле (30) определен с точностью до целого числа циклов a и b. Это означает, что функция обратная интегралу (30) – периодическая функция с периодами равными интегралам по циклам a и b.

$$T = \int_a \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = 2\int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}};$$

$$T' = \int_b \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = 2\int_{1}^{1/k} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Число T – вещественное, так как подынтегральная функция вещественная на всем пути интегрирования. Число T' – мнимое, потому что подынтегральная функция мнимая. Отношение периодов функции $\mathrm{sn}(z|k)$ – мнимое, следовательно эта функция – двоякопериодическая.

Обычно вводят обозначения:

$$K(k) = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}};$$

$$K'(k) = \int_1^{1/k} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Пользуясь этими обозначениями, пишут:

$$T = 4K(k), \quad T' = 4K'(k).$$

7.3 Эллиптические функции Якоби

Эллиптические функции в анализе обычно вводятся либо как мероморфные двоякопериодические функции комплексного переменного, либо как обратные функции эллиптических интегралов. Здесь мы воспользуемся определением эллиптических функций Якоби при помощи дифференциальных уравнений.

Продифференцировав (29) по t, легко увидеть, что функция синус амплитуды удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$y' = \sqrt{(1 - k^2y^2)(1 - y^2)}.$$

Обозначим: $\mathrm{cn}^2(t|k) = 1 - \mathrm{sn}^2(t|k)$, $\mathrm{dn}^2 = 1 - k^2\mathrm{sn}^2(t|k)$. Функция $\mathrm{cn}(t|k)$ называется *косинус амплитуды или косинус Якоби*, а $\mathrm{dn}(t|k)$ – *дельта амплитуды*. Выведем формулы для производных этих функций.

$$2\mathrm{cn}'(t|k)\mathrm{cn}(t|k) = -2\mathrm{sn}(t|k)\sqrt{(1 - \mathrm{sn}^2(t|k))(1 - k^2\mathrm{sn}^2(t|k))},$$

$$2\mathrm{dn}'(t|k)\mathrm{dn}(t|k) = -2k^2\mathrm{sn}(t|k)\sqrt{(1 - \mathrm{sn}^2(t|k))(1 - k^2\mathrm{sn}^2(t|k))}.$$

Или

$$\mathrm{sn}'(t|k) = \mathrm{cn}(t|k)\mathrm{dn}(t|k),$$
$$\mathrm{cn}'(t|k) = -\mathrm{sn}(t|k)\mathrm{dn}(t|k),$$
$$\mathrm{dn}'(t|k) = -k^2\mathrm{sn}(t|k)\mathrm{cn}(t|k).$$

Таким образом, тройка функций $\mathrm{sn}(t|k), \mathrm{cn}(t|k), \mathrm{dn}(t|k)$ удовлетворяет системе уравнений:

$$y_1' = y_2y_3, \quad y_2' = -y_1y_3, \quad y_3' = -k^2y_1y_2, \tag{31}$$

с начальными условиями, легко получающимися из интегрального представления $\mathrm{sn}(t|k)$:

$$y_1|_{u=0} = 0, \quad y_2|_{u=0} = 1, \quad y_3|_{u=0} = 1. \tag{32}$$

Если отвлечься от истоков появления функции $\mathrm{sn}(t|k)$ – как обращения интеграла (29), то можно вводить эллиптические функции как решения задачи Коши (31), (32). Один первый интеграл этой системы получается, если первое уравнение умножить на $2y_1$, второе – на $2y_2$ и сложить оба полученных выражения.

$$2y_1y_1' + 2y_2y_2' = (y_1^2 + y_2^2)' = 0.$$

Еще один интеграл получается, если первое уравнение умножить на $2k^2y_1$, третье – на $2y_3$ и сложить их:

$$2k^2y_1'y_1 + 2k^2y_3'y_3 = (k^2y_1^2 + y_3^2)' = 0.$$

В результате два первых интеграла:

$$y_1^2 + y_2^2 = c_1, \quad k^2y_1^2 + y_3^2 = c_2.$$

Постоянные c_1 и c_2 определяются из начальных условий (32). Это приводит к тождествам:

$$\mathrm{sn}^2(t|k) + \mathrm{cn}^2(t|k) = 1, \quad k^2\mathrm{sn}^2(t|k) + \mathrm{dn}^2(t|k) = 1. \tag{33}$$

7.4 Разложение в окрестности нуля аргумента

В следующих пунктах будут приведены формулы для разложения функции синус амплитуды при малом значении аргумента и значениях параметра k близких к нулю и единице. Эти разложения, вообще говоря, пригодны в окрестности вещественной оси $\Im(z) = 0$. Чтобы подчеркнуть тот факт, что аргумент функции вещественный, он обозначается через t.

Пусть значение t достаточно мало. Тогда $\mathrm{sn}(t|k)$ можно искать в виде ряда по степеням t.

$$\mathrm{sn}(t|k) = f_1(k)t + f_2(k)t^2 + f_3(k)t^3 + \dots.$$

Подставим это выражение в дифференциальное уравнение для функции $\mathrm{sn}(t|k)$:

$$(y')^2 = (1 - y^2)(1 - k^2y^2).$$

В результате получим:

$$\begin{gathered}(f_1(k) + 2f_2(k)t + 3f_3(k)t^2 + \dots)^2 = \\ (1 - (f_1(k)t + f_2(k)t^2 + f_3(k)t^3 + \dots)^2) \times \\ (1 - k^2(f_(k)t + f_2(k)t^2 + f_3(k)t^3 + \dots)^2).\end{gathered}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях t. Тогда:

$$f_1^2(k) \equiv 1 \quad 4f_1(k)f_2(k) \equiv 0,$$

$$6f_1(k)f_3(k) + 4f_2(k) = -f_1^2(k) - k^2 f_1(k).$$

Окончательно, разложение в окрестности нулевого значения аргумента:

$$\mathrm{sn}(t|k) = t - \frac{1}{6}(1+k^2)t^3 + \ldots.$$

Выражение для общего члена этого ряда неизвестно.

7.5 Разложение в окрестности нулевого значения параметра

Пусть параметр k близок к нулю, тогда функция $\mathrm{sn}(t|k)$ близка к тригонометрическому синусу. Это легко показать, если искать представление $\mathrm{sn}(t|k)$ в виде:

$$\mathrm{sn}(t|k) = \phi_0(t) + \phi_1(t)k + \phi_2(t)k^2 + \phi_3(t)k^3 + \ldots.$$

Подставим это выражение в дифференциальное выражение для функции $\mathrm{sn}(t|k)$.

$$\begin{aligned} &(\phi_0' + \phi_1' k + \phi_2' k^2 + \phi_3 k^3 + \ldots)^2 = \\ &= (1 - (\phi_0 + \phi_1 k + \phi_2 k^2 + \phi_3 k^3 + \ldots)^2) \times \\ &\quad (1 - k^2(\phi_0 + \phi_1 k + \phi_2 k^2 + \phi_3 k^3 + \ldots)^2). \end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях k. В результате получим дифференциальные уравнения для функций ϕ_j:

$$(\phi_0')^2 = 1 - \phi_0^2, \quad 2\phi_1'\phi_0' = -2\phi_0\phi_1, \quad 2\phi_0'\phi_2' + (\phi_1')^2 = -2\phi_0\phi_2 - \phi_0^2, \quad \ldots.$$

Начальные условия для функций ϕ_j:

$$\phi_0|_{t=0} = 1, \quad \phi_j|_{t=0} = 0, \ j = 1, 2, \ldots.$$

Решения этой рекурентной системы уравнений:

$$\phi_0 = \sin(t), \quad \phi_1 \equiv 0, \quad \phi_2 = (-t\cos(t) + \sin(t)\cos^2(t))/2, \ \ldots.$$

В результате получим:

$$\mathrm{sn}(t|k) = \sin(t) + \frac{k^2}{2}(-t\cos(t) + \sin(t)\cos^2(t)) + \ldots.$$

7.6 Разложение в окрестности $k = 1$

Рассмотрим случай, когда параметр k близок к 1. В этом случае его удобно выразить через дополнительный модуль $k^2 = 1 - (k')^2$. Решение уравнения для синуса амплитуды опять будем искать в виде ряда, но уже по степеням дополнительного модуля k':

$$\mathrm{sn}(t|k) = \psi_0(t) + k'\psi_1(t) + (k')^2\psi_2(t) + \dots .$$

Подставим это разложение в дифференциальное уравнение для $\mathrm{sn}(t|k)$:

$$(\psi_0' + \psi_1' k' + \psi_2'(k')^2 + \dots)^2 = (1 - (\psi_0 + \psi_1 k' + \psi_2 (k')^2 + \dots)^2) \times$$
$$(1 - (1 - (k')^2)(\psi_0 + \psi_1 k' + \psi_2 k^2 + \dots)^2).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях k'. В результате получим рекурентную последовательность уравнений.

$$(\psi_0')^2 = (1 - \psi_0^2)^2, \quad 2\psi_1'\psi_0' = -2\psi_0\psi_1,$$
$$2\psi_0'\psi_2' + (\psi_1')^2 = -2\psi_0\psi_2(1 - \psi_0^2) - (2\psi_0\psi_2 - \psi_0^2)(1 - \psi_0^2), \quad \dots .$$

Начальные условия для функций ψ_j такие же, как и для функций ϕ_j в предыдущем пункте. Решив уравнений для первых трех коэффициентов разложения, получим:

$$\mathrm{sn}(t|k) = \tanh(t) + \frac{1}{2}(k')^2(\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{ch}(t) - t)\frac{1}{\mathrm{ch}^2(t)} + \dots$$

7.7 Задачи

1. Представить функцию Вейерштрасса через функцию синус амплитуды.

2. Написать асимптотику решения уравнения

$$u'' + g_2 u + g_3 u^2 + \varepsilon u^3 = 0,$$

при $\varepsilon \to 0$.

7.8 Литература

Для более глубокого изучения эллиптических функций можно обратиться, например, к книге Уиттекера и Ватсона, или к учебнику

В.В. Прасолов, Ю.П. Соловьёв. Эллиптические функции.

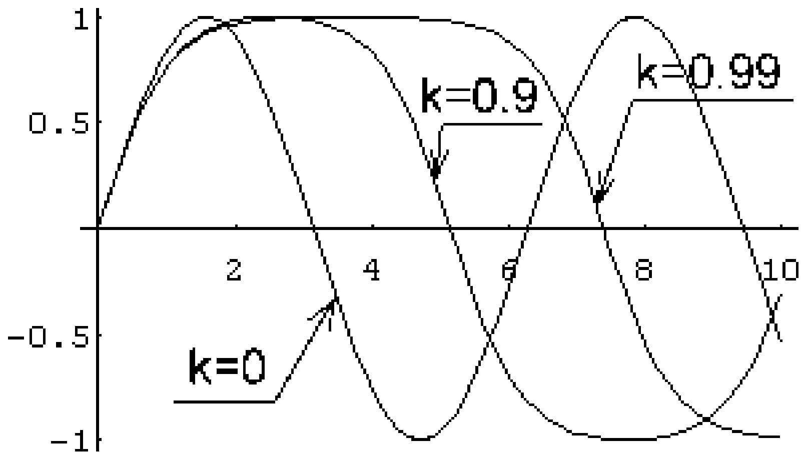

Рис. 4: Функция $sn(x|k)$.

8 Тэта-функции

Тэта-функции – удобный аппарат для вычислений из-за простоты аналитических свойств и быстрой сходимости рядов их определяющих. Поэтому часто вычисления, связанные с эллиптическими функциями проводятся именно в терминах тэта-функций.

8.1 Тэта-функция Якоби

Уже из названия лекции ясно, что тэта-функций несколько. Для первого знакомства в качестве основной возьмем тэта-функцию Якоби:

$$\theta_4(z|\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \exp(i\pi(m^2\tau + 2mz)). \tag{34}$$

Иногда, следуя самому Якоби, эта функция обозначается как $\Theta(z|\tau)$. В формуле (34) переменная z называется аргументом, а τ – параметром. Часто для краткости параметр τ не пишут: $\theta_4(z)$, конечно, когда это не приводит к недоразумениям.

Легко видеть, что для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы $\Re(i\pi\tau) < 0$. Это условие приводит к ограничению на значения параметра тэта-функции $\Im(\tau) > 0$. Воспользовавшись признаком Даламбера для сходимости рядов, можно убедиться, что функция $\theta_4(z)$ – целая функция.

Функцию $\theta_4(z|\tau)$ легко переписать в виде сходящегося тригонометрического ряда:

$$\theta_4(z|\tau) = 1 - 2q\cos(2\pi z) + 2q^4\cos(4\pi z) - 2q^9\cos(6\pi z) + \ldots,$$

где $q = \exp(-i\pi\tau)$.

Из этой формулы легко видеть, что $\theta_4(z|\tau)$ – четная функция, периодическая функция z:

$$\theta_4(z+1) = \theta_4(z).$$

Еще одно важное свойство тэта-функции – квазипериодичность по τ:

$$\theta_4(z+\tau|\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \exp(i\pi(m^2\tau + 2mz + 2m\tau)) =$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)(-1)^{m+1} \exp(i\pi((m+1)^2\tau - \tau + 2(m+1)z - 2z)) =$$

$$-\exp(-i\pi(\tau + 2z)) \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \exp(i\pi(m^2\tau + 2mz)).$$

В результате получается формула:

$$\theta_4(z+\tau|\tau) = -\exp(-i\pi(\tau+2z))\theta_4(z|\tau).$$

То есть, функция $\theta_4(z)$ – квазидвоякопериодическая. Это замечание позволяет определить поведение тэта-функции на всей комплексной плоскости, зная ее поведение в параллелограмме с вершинами $0, \tau, \tau+1, 1$.

Из тэта-функции легко получить двоякопериодическую функцию. Для этого можно воспользоваться формулой:

$$\ln\theta_4(z+\tau) = i\pi - i\pi(2z+\tau) + \ln\theta_4(z).$$

Если эту формулу дважды продифференцировать по z, тогда первое слагаемое пропадет, и получим:

$$\frac{d^2}{dz^2}\ln\theta_4(z+\tau) = \frac{d^2}{dz^2}\ln\theta_4(z),$$

то есть

$$\phi(z) = \frac{d^2}{dz^2}\ln\theta_4(z)$$

– двоякопериодическая функция.

8.2 Дифференциальное уравнение

Функция $\theta_4(z|\tau)$ – частное решение дифференциального уравнения в частных производных:

$$\partial_z^2\theta_4 + i4\pi\partial_\tau\theta_4 = 0.$$

Это легко проверить прямой подстановкой:

$$\partial_z^2\theta_4(z|\tau) = -4\pi^2\sum_{m=-\infty}^{\infty} m^2(-1)^m\exp(i\pi(m^2\tau+2mz));$$

$$\partial_\tau\theta_4(z|\tau) = i\pi\sum_{m=-\infty}^{\infty} m^2(-1)^m\exp(i\pi(m^2\tau+2mz).$$

8.3 Еще три тэта-функции

Для удобства вычислений обычно вводят еще три тэта функции:

$$\theta_1(z|\tau) = -i\exp(i\pi(z+\frac{1}{4}\tau))\theta_4(z+\frac{1}{2}\tau|\tau) =$$

$$-i\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\exp(i\pi((m+\frac{1}{2})^2\tau+2m(z+1))),$$

$$\theta_2(z|\tau)=\theta_1(z+\frac{1}{2}|\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp(i\pi((m+\frac{1}{2})^2\tau+2m(z+1))),$$

$$\theta_3(z|\tau)=\theta_4(z+\frac{1}{2}|\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp(i\pi(m^2\tau+2mz)).$$

Прямые вычисления показывают, что

$$\theta_3(z+1|\tau)=\theta_3(z|\tau),\quad \theta_3(z+\tau)=\exp(-i\pi(\tau+2z))\theta_3(z|\tau),$$

$$\theta_2(z+1|\tau)=-\theta_2(z|\tau),\quad \theta_2(z+\tau)=\exp(-i\pi(\tau+2z))\theta_3(z|\tau),$$

$$\theta_1(z+1|\tau)=-\theta_1(z|\tau),\quad \theta_1(z+\tau)=-\exp(-i\pi(\tau+2z))\theta_1(z|\tau).$$

Эти функции так же, как и $\theta_4(z)$ можно записать в виде тригонометрических рядов:

$$\theta_1(z)=2q^{1/4}\sin(z\pi)-2q^{9/4}\sin(3z\pi)+2q^{25/4}\sin(5z\pi)-\ldots;$$

$$\theta_2(z)=2q^{1/4}\cos(z\pi)+2q^{9/4}\cos(3z\pi)+2q^{25/4}\cos(5z\pi)+\ldots;$$

$$\theta_3(z)=1+2q\cos(2z\pi)+2q^4\cos(4z\pi)+2q^9\cos(6z\pi)+\ldots.$$

Из этих формул легко видеть, что функция $\theta_1(z)$ – нечетная функция, остальные – четные.

Здесь уместно привести *формулы приведения*, связывающие тэта-функции между собой:

$$\theta_1(z)=-\theta_2(z+\frac{1}{2})=-iM\theta_3(z+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau)=iM\theta_4(z+\frac{1}{2}\tau);$$

$$\theta_2(z)=M\theta_3(z+\frac{1}{2}\tau)=M\theta_4(z+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau)=\theta_1(z+\frac{1}{2});$$

$$\theta_3(z)=\theta_4(z+\frac{1}{2})=M\theta_1(z+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau)=M\theta_2(z+\frac{1}{2}\tau);$$

$$\theta_4(z)=-iM\theta_1(z+\frac{1}{2}\tau)=iM\theta_2(z+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau)=\theta_3(z+\frac{1}{2}),$$

где $M=q^{1/4}\exp(iz\pi)$.

Эти равенства легко получить, воспользовавшись написанными выше определениями тэта-функций.

8.4 Нули тэта-функций

Пусть z_0 – какой-нибудь нуль тэта-функции, тогда в комплексной плоскости эта тэта-функция обращается в нуль в точках $z_0 + m + \tau n$, где $m, n \in \mathbb{Z}$. На самом деле, в ячейке $z, z+1, z+\tau+1, z+\tau$ может быть только один нуль тэта-функции. В этом можно убедиться, посчитав нули тэта-функции внутри ячейки. Обозначим контур, обходящий ячейку C. Тогда число нулей внутри ячейки можно вычислить с помощью контурного интеграла

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C dt\frac{\theta'(t)}{\theta(t)} = \frac{1}{2i\pi}\int_z^{z+1} dt\frac{\theta'(t)}{\theta(t)} + \frac{1}{2i\pi}\int_{z+1}^{z+1+\tau} dt\frac{\theta'(t)}{\theta(t)}+$$

$$+\frac{1}{2i\pi}\int_{z+1+\tau}^{z+1} dt\frac{\theta'(t)}{\theta(t)} + \frac{1}{2i\pi}\int_{z+1}^{z} dt\frac{\theta'(t)}{\theta(t)} =$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\int_z^{z+1} dt\Big(\frac{\theta'(t)}{\theta(t)} - \frac{\theta'(t+\tau)}{\theta(t+\tau)}\Big)+$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_z^{z+\tau} dt\Big(\frac{\theta'(t)}{\theta(t)} - \frac{\theta'(t+1)}{\theta(t+1)}\Big) = \frac{1}{2i\pi}\int_z^{z+1} dt\Big(\frac{\theta'(t)}{\theta(t)} - \frac{\theta'(t+\tau)}{\theta(t+\tau)}\Big).$$

Для вычисления этого интеграла надо воспользоваться формулой:

$$\frac{\theta'(t+\tau)}{\theta(t+\tau)} = \frac{-2i\pi\exp(-i\pi(\tau+2z))\theta(t)}{\exp(-i\pi(\tau+2t)\theta(t)}$$

$$+\frac{\exp(-i\pi(\tau+2t))\theta'(t)}{\exp(-i\pi(\tau+2t)\theta(t)} = -2i\pi + \frac{\theta'(t)}{\theta(t)}.$$

Подставив эту формулу в интеграл, получим:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C dt\frac{\theta'(t)}{\theta(t)} = 1.$$

Это означает, что тэта-функция только один раз обращается в нуль внутри контура C, и этот нуль первого порядка. Функция $\theta_1(0) = 0$. В оспользовавшись полученными выше формулами, легко получить:

$$\theta_2(1/2) = 0, \quad \theta_3(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tau) = 0 \quad \theta_4(\frac{1}{2}\tau) = 0.$$

8.5 Соотношения между квадратами

Здесь наша цель – вывести формулы, связывающие квадраты тэта-функций. Для этого рассмотрим отношение:

$$\phi(z) = \frac{a\theta_1^2(z) + b\theta_4^2(z)}{\theta_2^2(z)}.$$

Здесь a и b – постоянные, значения которых будут уточнены позже.

Функция $\phi(z)$ – двоякопериодическая с периодами 1 и τ. Постоянные a и b выберем так, чтобы в нуле функции $\theta_2(z)$ – в точке $z = 1/2$ числитель тоже обращался в нуль. В этом случае функция $\phi(z)$ может иметь только один нуль первого порядка в своем параллелограмме периодов. Следовательно, эта функция ни что иное, как постоянная. Подберем соотношение между a и b так, чтобы $\phi \equiv 1$. Для этого воспользуемся равенством

$$a\theta_1^2(z) + b\theta_4^2(z) = \theta_2^2(z),$$

в точках, где обращаются в нуль функции из левой части этого равенства, то есть при $z = 0$ и при $z = \tau/2$.

$$b\theta_4^2(0) = \theta_2^2(0), \quad a\theta_1^2(\tau/2) = \theta_2^2(\tau/2).$$

Использовав формулы, связывающие тэта-функции, можно выразить $\theta_1^2(\tau/2) = -q^{-1/2}\theta_4^2(0)$ и $\theta_2^2(\tau/2) = q^{-1/2}\theta_3(0)$. Для краткости дальше вместо того, чтобы писать $\theta_k(0)$, будем писать θ_k, подразумевая при этом соответствующую постоянную. Тогда искомая формула для квадратов тэта-функций имеет вид:

$$\theta_4^2\theta_2^2(z) = \theta_2^2\theta_4^2(z) - \theta_3^2\theta_1^2(z).$$

В этой формуле можно устроить сдвиги на половину периода или на половину квазипериода τ, а еще на две половины: одну половину квазипериода и одну половину настоящего периода. В результате получится еще три формулы, связывающие квадраты тэта-функций.

Для примера рассмотрим сдвиг на половину квазипериода.

$$\theta_4^2 M^{-2}\theta_3^2(z) = -M^{-2}\theta_2^2\theta_1^2(z) + M^{-2}\theta_3^2\theta_4^2(z).$$

Умножив на M^2, получим:

$$\theta_4^2\theta_3^2(z) = -\theta_2^2\theta_1^2(z) + \theta_3^2\theta_4^2(z).$$

Еще две формулы для квадратов тэта-функций:

$$\theta_2^2\theta_1^2(z) = \theta_2^2\theta_3^2(z) - \theta_3^2\theta_2^2(z),$$

$$\theta_4^2\theta_4^2(z) = \theta_3^2\theta_3^2(z) - \theta_2^2\theta_2^2(z).$$

8.6 Тэта-функции и функция синус амплитуды

Рассмотрим отношение тэта-функций: $\frac{\theta_1(z)}{\theta_4(z)}$. Легко видеть, что при изменении аргумента тэта-функций на 1 и на τ:

$$\frac{\theta_1(z+1)}{\theta_4(z+1)} = \frac{-\theta_1(z)}{\theta_4(z)}; \quad \frac{\theta_1(z+\tau)}{\theta_4(z+\tau)} = \frac{\theta_1(z)}{\theta_4(z)}.$$

Теми же свойствами обладает и производная этого отношения тэта-функций. С другой стороны, выражение

$$\frac{\theta_2(z)\theta_3(z)}{\theta_4^2(z)}$$

имеет такие же свойства периодичности. Тогда

$$\phi(z) = \left(\frac{\theta_1(z)}{\theta_4(z)}\right)' \frac{\theta_4^2(z)}{\theta_2(z)\theta_3(z)}$$

двоякопериодическая функция. Она имеет простые полюсы в точках, сравнимых с $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}$. Для вычисления функции $\phi(z)$ в точке $\phi(z+\tau/2)$ можно воспользоваться формулами приведения (см. п.3). Тогда

$$\theta_1(z+\tau/2) = iq^{-1/4}\exp(iz\pi)\theta_4(z),$$

$$\theta_4(z+\tau/2) = iq^{-1/4}\exp(-iz\pi)\theta_1(z),$$

$$\theta_2(z+\tau/2) = q^{-1/4}\exp(-iz\pi)\theta_3(z),$$

$$\theta_3(z+\tau/2) = q^{-1/4}\exp(-iz\pi)\theta_2(z).$$

Тогда $\phi(z+\tau/2) = \phi(z)$. То есть, функция $\phi(z)$ – двоякопериодическая с периодами 1 и $\tau/2$. Эта функция в своем параллегорамме периодов может иметь лишь один простой полюс в точке $1/2$. Такая функция может быть только постоянной. Значение этой постоянной можно найти, вычислив, например, ее значения в нуле.

$$\phi(z) \equiv \theta_4^2(0).$$

Таким образом получена формула:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\theta_1(z)}{\theta_4(z)}\right) = \theta_4^2 \frac{\theta_2(z)}{\theta_4(z)}\frac{\theta_3(z)}{\theta_4(z)}.$$

Теперь удобно обозначить:

$$\xi = \frac{\theta_1(z)}{\theta_2(z)}.$$

Уравнение для ξ:

$$\frac{d\xi}{dz} = (\theta_2^2 - \xi\theta_3^2)(\theta_3^2 - \xi\theta_2^2).$$

От этого уравнения можно перейти к уравнению для функции синус амплитуды:

$$\frac{\xi\theta_3}{\theta_2} = y, \quad z\theta_3^2 = u, \quad \sqrt{k} = \frac{\theta_2}{\theta_3},$$

тогда:

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = (1 - y^2)(1 - k^2y^2).$$

Частное решение этого уравнения:

$$\mathrm{sn}(u) = \frac{\theta_3}{\theta_2}\frac{\theta_1(u\theta_3^{-2})}{\theta_4(u\theta_2^{-2})}.$$

Периоды функции синус амплитуды: $2\theta_3^2$ и $\tau\theta_3^2$. Простые полюсы находятся в точках $\frac{1}{2}\tau\theta_3^2$ и $\theta_3^2 + \frac{1}{2}\theta_3^2$.

8.7 Литература

При подготовке к этой лекции использовались учебники:

1. Н.И. Ахиезер, Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.

2. Уиттекер, Ватсон, Курс современного анализа, т.2.

9 Интегрируемые волчки

В этой лекции приводятся примеры задач из механики, которые решаются с использованием аппарата эллиптических и гиперэллиптических функций. Эти примеры взяты из теории движений твердого тела вокруг неподвижной точки. Это хорошо известные волчки Эйлера, Лагранжа и Ковалевской. По существу эти примеры, если не считать случай Гесса-Аппельрота (вырождение волчка Ковалевской), исчерпывают интегрируемые движения твердого тела.

9.1 Уравнения Эйлера-Пуассона

В этом пункте выведены уравнения Эйлера-Пуассона, определяющие движение твердого тела вокруг неподвижной точки. Здесь приходится привлекать некоторые простые понятия теоретической механики. Для существа вопроса это кажется очень полезным читателям, знакомым с механикой. С другой стороны, этот пункт можно безболезненно пропустить, если интересоваться только математической стороной вопроса – уравнениями и их решениями.

Рассмотрим твердое тело, закрепленное в точке. Эту точку будем обозначать O. С этой точкой свяжем две декартовы системы координат. Одна система координат неподвижна в пространстве. Причем, для простоты будем полагать, что сила тяжести направлена в отрицательном направлении оси Oz'. Обозначим эту систему координат O, x', y', z'. Вторая система координат жестко связана с телом и, следовательно, подвижна в пространстве. Для простоты возьмем эту систему координат такой, что в этой системе тензор инерции тела имеет только диагональные элементы. Подвижную систему координат будем обозначать O, x, y, z.

Уравнения движения твердого тела получаются из закона сохранения кинетического момента K:

$$\frac{dK}{dt} = \mathcal{M},$$

где $\mathcal{M}$– момент внешних сил (силы тяжести).

Сила тяжести прилагается к центру тяжести тела. Координаты центра тяжести (x_g, y_g, z_g) в подвижной системе не меняются.

Кинетический момент в неподвижной системе координат вычисляется по формуле:

$$K = \int_M r \times v \, dM.$$

Интегрирование проводится по всему телу, r – радиус-вектор точки тела массы dM, v– вектор скорости движения этой точки, $\times$ означает векторное произведение.

Скорость точки в неподвижной системе координат легко вычисляется через угловую скорость ω и радиус-вектор:

$$v = \omega \times r.$$

Эта формула позволяет переписать формулу для кинетического момента через угловую скорость и тензор инерции тела. Мы предполагаем, что система координат, связанная с телом является такой, что тензор инерции тела в этой системе координат имеет диагональный вид:

$$L = \mathrm{diag}(A, B, C).$$

Тогда компоненты кинетического момента:

$$K = (A\omega_1, B\omega_2, C\omega_3).$$

Кроме этого, производная кинетического момента по времени в подвижной системе координат имеет вид:

$$\frac{\tilde{d}K}{dt} = -\omega \times K + r_g \times P.$$

Здесь r_g – координаты центра тяжести тела в подвижной системе координат, $P = (Mg\gamma_1, Mg\gamma_2, Mg\gamma_3)$ – координаты силы тяжести, действующей на тело. Числа γ_j, $j = 1, 2, 3$– косинусы углов между положительными направлениями соответствующих осей подвижной и неподвижной систем координат.

В результате закон изменения кинетического момента тела можно записать в виде:

$$\frac{dK}{dt} = -\omega \times K + r_g \times P.$$

Это векторное уравнение, записанное в виде системы уравнений, имеет вид:

$$\begin{aligned}
A\frac{d\omega_1}{dt} + (C - B)\omega_2\omega_3 &= Mg(z_g\gamma_2 - y_g\gamma_3),\\
B\frac{d\omega_2}{dt} + (A - C)\omega_3\omega_1 &= Mg(x_g\gamma_3 - z_g\gamma_1),\\
C\frac{d\omega_3}{dt} + (B - A)\omega_1\omega_1 &= Mg(y_g\gamma_1 - x_g\gamma_2).
\end{aligned}$$

Эта система уравнений называется *уравнениями Эйлера.* В системе шесть неизвестных – помимо $\omega_{1,2,3}$ это еще и $\gamma_{1,2,3}$. Для $\gamma_{1,2,3}$ можно получить еще три уравнения. Например, если выразить единичный орт k_1

неподвижной системы координат через его координаты в системе, связанной с телом:

$$\frac{\tilde{d}k_1}{dt} + \omega \times k_1 = 0.$$

Соответствующая система уравнений:

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3,$$
$$\frac{d\gamma_2}{dt} = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1,$$
$$\frac{d\gamma_3}{dt} = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2.$$

Эта система уравнений называется *уравнениями Пуассона.*

Совместно уравнения Эйлера-Пуассона определяют движение твердого тела с закрепленной точкой.

Для этих уравнений известны три полных интеграла. Это *интеграл энергии*:

$$A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 + 2Mgz_g = C_1.$$

Интеграл площадей – проекция вектора K на ось Oz не изменяется:

$$A\omega_1\gamma_1 + B\omega_2\gamma_2 + C\omega_3\gamma_3 = C_2.$$

Геометрический интеграл – сумма квадратов направляющих косинусов равна единице:

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Для интегрирования уравнений Эйлера-Пуассона достаточно найти еще один первый интеграл, однако, он известен лишь в трех специальных случаях, которые называются волчок Эйлера, волчок Лагранжа и волчок Ковалевской.

9.2 Волчок Эйлера

Волчок Эйлера – это специальный случай уравнений Эйлера-Пуассона, когда точка закрепления совпадает с центром тяжести тела ($r_g = 0$). В этом случае уравнения Эйлера можно рассматривать отдельно от уравнений Пуассона.

$$A\frac{d\omega_1}{dt} = (B - C)\omega_2\omega_3,$$
$$B\frac{d\omega_2}{dt} = (C - A)\omega_3\omega_1,$$
$$C\frac{d\omega_3}{dt} = (A - B)\omega_1\omega_1.$$

Порядок этой системы уравнений можно понизить, воспользовавшись двумя первыми интегралами: интегралом энергии

$$A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 = C_1$$

и величиной кинетического момента тела (если тело закреплено в центре тяжести, тогда момент силы тяжести, действующей на тело, равен нулю, и кинетический момент тела неизменен):

$$A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 = C_2.$$

Здесь удобно перейти от уравнений для компонент угловой скорости к уравнениям для компонент кинетического момента

$$(M_1, M_2, M_3) = (A\omega_1, B\_2, C\omega_3).$$

В результате систему уравнений можно записать в виде:

$$\begin{aligned} M_1' &= M_2 M_3 (a_2 - a_3), \\ M_2' &= M_3 M_1 (-a_1 + a_3), \\ M_3' &= M_1 M_2 (a_1 - a_2), \end{aligned}$$

где $a_1 = 1/A$, $a_2 = 1/B$, $a_3 = 1/C$. Будем считать, что оси координат выбраны так, что выполняются неравенства $a_1 > a_2 > a_3$.

Интегралы движения примут вид:

$$H(M) = \frac{1}{2}(a_1 M^2 + a_2 M_2^2 + a_3 M_3^2)$$

и полный момент импульса

$$F(M) = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2.$$

Из вида этих интегралов следует, что инвариантное многообразие в трехмерном пространстве – это пересечение эллипсоида $H = \text{const}$ и сферы $F = \text{const}$. Вращение вокруг малой и большой осей устойчиво, а вокруг средней – неустойчиво. Это можно заметить из прямого рассмотрения системы уравнений. Если нарисовать траектории движения, тогда можно заметить, что окрестности вершин средней оси – седла.

Проинтегрируем уравнения движения волчка Эйлера.

$$\begin{aligned} M_1' &= M_2 M_3 (a_2 - a_3), \\ \frac{1}{2}(a_1 M^2 + a_2 M_2^2 + a_3 M_3^2) &= h, \\ M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 &= f. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} M_3^2 &= f - M_1^2 - M_2^2, \\ \frac{1}{2}(a_1 M_1^2 + a_2 M_2^2 + a_3 f - a_3 M_1^2 - a_2 M_2^2) &= h, \\ (a_1 - a_3)M_1^2 + (a_2 - a_3)M_2^2 &= 2h - a_3 f, \\ M_2 &= \frac{1}{a_2 - a_3}(2h - a_3 f - (a_1 - a_3)M_1^2), \\ M_3^2 = f - M_1^2 - \frac{1}{a_2 - a_3}&(2h - a_3 f - (a_1 - a_3)M_1^2), \\ M_2^2 &= c_1 - c_2 M_1^2, \\ M_3^2 &= c_3 - c_4 M_1^2. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$(M_1')^2 = (c_1 - c_2 M_1^2)(c_3 - C_4 M_1^2)(a_2 - a_3)^2.$$

От этого уравнения легко перейти к уравнению для эллиптического синуса. Поделим обе части уравнения на $c_1 c_3 (a_2 - a_3)^2$. Обозначим $y = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} M_1$. После подстановки функции y в уравнение получим:

$$\frac{1}{c_1 c_3 (a_2 - a_3)^2}(y')^2 = (1 - y^2)(1 - \frac{c_4 c_1}{c_3 c_2} y^2).$$

Из этого уравнения следует, что функция y может быть представлена в виде:

$$y = \mathrm{sn}\Big(\frac{t}{(a_2 - a_3)\sqrt{c_2 c_3}}|k\Big), \quad \text{где } k = \frac{c_4 c_1}{c_3 c_2}.$$

Остальные составляющие кинетического момента также можно выразить через эллиптические функции Якоби.

9.3 Волчок Лагранжа

Если два статических момента твердого тела равны ($A = B$) и координаты центра тяжести $x_g = y_g = 0$, тогда говорят о волчке Лагранжа. Уравнения волчка Лагранжа:

$$\begin{aligned} \omega_1' - m\omega_2\omega_3 &= -\frac{\alpha}{2}\gamma_2, \\ \omega_2' + m\omega_1\omega_3 &= \frac{\alpha}{2}\gamma_1, \\ \omega_3' &= 0, \\ \gamma_1' &= \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3, \\ \gamma_2' &= \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1, \\ \gamma_3' &= \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2. \end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения $\alpha = -\frac{2Mgz_g}{A}$, $m = \frac{A-C}{A}$.

Первые интегралы системы Эйлера-Пуассона, написанные в первой части этой лекции, примут вид:

$$\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2 - b\gamma_3 = k_1,\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1,\ \omega_3 = \text{const}.$$

Умножим первое из уравнений Эйлера-Лагранжа на ω_1, второе на ω_2, сложим получившиеся уравнения в результате получим:

$$\omega_1\omega_1' + \omega_2\omega_2' = \frac{\alpha}{2}(\gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1).$$

Легко видеть, что правая часть этого уравнения – ни что иное, как $\frac{\alpha}{2}\gamma_3'$. Воспользовавшись этим, уравнение можно проинтегрировать по времени.

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 - \alpha\gamma_3 = h.$$

Это еще один первый интеграл уравнений Эйлера-Пуассона для волчка Лагранжа.

Решение уравнений для волчка Лагранжа можно выразить в эллиптических функциях. Легче всего получить уравнение для γ_3. Возведем в квадрат последнее из уравнений Эйлера-Лагранжа. Слагаемое $-2\omega_1\gamma_2\omega_2\gamma_1$ в правой части заменим, исходя из квадрата первого из выписанных первых интегралов:

$$-2\omega_1\gamma_2\omega_2\gamma_1 = \omega_1^2\gamma_1^2 + \omega_2^2\gamma_2^2 - (k_1 - b\gamma_3)^2.$$

В результате получим уравнение:

$$(\gamma_3)^2 = \omega_1^2\gamma_2^2 + \omega_2^2\gamma_1^2 + \omega_1^2\gamma_1^2 + \omega_2^2\gamma_2^2 - (k_1 - b\gamma_3)^2.$$

Теперь, воспользовавшись выражением для суммы квадратов γ_k и выведенным дополнительным законом сохранения, получим:

$$(\gamma_3')^2 = (\alpha\gamma_3 + h)(1 - \gamma_3^2) - (k_1 - b\gamma_3)^2.$$

Это уравнение решается в эллиптических функциях.

9.4 Волчок Ковалевской

Интегрирование волчка Ковалевской связано с красивыми математическими преобразованиями – так называемым преобразованием Абеля и задачей обращения Якоби. Поэтому, несмотря на громоздкость формул, кажется полезным хотя бы познакомиться с идеями, лежащими в основе интегрирования волчка Ковалевской.

Уравнения волчка Ковалевской получаются из уравнений Эйлера-Пуассона, когда $A = B = 2C$, $y_g = 0$, $z_g = 0$. Система координат, связанная с телом, выбирается так, что $x_g < 0$. Уравнения Эйлера-Пуассона перепишем для безразмерных переменных: $p = c_1\omega_1$, $q = c_1\omega_2$, $r = c_1\omega_3$, $c_1 t = \tau$, здесь $c_1 = \frac{Mg|x_g|}{C}$. В этих координатах уравнения волчка Ковалевской имеют вид:

$$\begin{aligned}
2p' &= qr,\\
2q' &= -pr - \mu\gamma_3,\\
r' &= \mu\gamma_2,\\
\gamma_1' &= r\gamma_2 - q\gamma_3,\\
\gamma_2' &= p\gamma_3 - r\gamma_1,\\
\gamma_3' &= q\gamma_3 - p\gamma_2.
\end{aligned}$$

Здесь $\mu = \mathrm{const}$.

Есть четыре интеграла движения:
полная энергия

$$H = 2(p^2 + q^2) + r^2 - 2\mu\gamma_1,$$

момент импульса

$$L = 2(p\gamma_1 + q\gamma_2) + r\gamma_3,$$

условие связи

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$$

и интеграл Ковалевской

$$K = (p^2 - q^2 + \mu\gamma_1)^2 + (2pq + \mu\gamma_2)^2.$$

Рассмотрим поверхность уровня этих интегралов

$$H = 6h, \quad L = 2l, \quad K = k^2.$$

Введем на этой поверхности координаты S_1 и S_2

$$S_{1,2} = 3h + \frac{R(x_1, x_2) \pm \sqrt{R(x_1)R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2},$$

где

$$x_{1,2} = p \pm iq, \quad R(z) = -z^4 + 6hz^2 + 4\mu l z + \mu^2 - k^2,$$
$$R(x_1, x_2) = -x_1^2 x_2^2 + 6h x_1 x_2 + 2\mu l(x_1 + x_2) + \mu^2 - k^2.$$

В переменных $S_{1,2}$ уравнения движения записываются в виде:

$$S_1' = \frac{i\sqrt{P_5(S_1)}}{2(S_1 - S_2)}, \quad S_2' = \frac{i\sqrt{P_5(S_2)}}{2(S_2 - S1)}, \tag{35}$$

где

$$P_5(z) = [z[(z-3h)^2 + \mu^2 - k^2] - 2\mu^2 l^2]((z-3h)^2 - k^2).$$

Уравнения для $S_{1,2}$ интегрируются преобразованием Абеля $\Gamma \to J(\Gamma)$, где Γ – риманова поверхность рода 2: $w^2 = P_5(z)$. Это преобразование имеет вид:

$$\zeta_1 = \int_{P_0}^{S_1} \frac{dz}{\sqrt{P_5(z)}} + \int_{P_0}^{S_2} \frac{dz}{\sqrt{P_5(z)}},$$
$$\zeta_2 = \int_{P_0}^{S_1} \frac{zdz}{\sqrt{P_5(z)}} + \int_{P_0}^{S_2} \frac{zdz}{\sqrt{P_5(z)}},$$

где P_0– фиксированная точка на римановой поверхности. Система уравнений движения (35) принимает вид:

$$\frac{d\zeta_1}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\zeta_2}{d\tau} = i.$$

Эти уравнения легко интегрируются, однако, для выяснения поведения решения в исходных переменных необходимо обратить преобразование Абеля. Задачу об обращении гиперэллиптических интегралов называют задачей обращения Якоби. Она решается с использованием тэта-функций. Покажем, что в ситуации общего положения преобразование Абеля локально обратимо. Для этого вычислим якобиан преобразования и покажем, что он не равен нулю.

$$\frac{\partial(\zeta_1, \zeta_2)}{\partial(S_1, S_2)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{P_5(S_1)}} & \frac{S_1}{\sqrt{P_5(S_1)}} \\ \frac{1}{\sqrt{P_5(S_@)}} & \frac{S_2}{\sqrt{P_5(S_2)}} \end{vmatrix} = \frac{S_2 - S_1}{\sqrt{P_5(S_1)P_5(S_2)}}.$$

Если $P_5(S_{1,2}) \neq 0$, тогда существует обратное преобразование.

9.5 Задачи

Выразить оставшиеся компоненты решения уравнений Эйлера-Пуассона в случае волчка Эйлера через функции Якоби.

Записать решение уравнений Эйлера-Пуассона в случае волчка Лагранжа через эллиптические функции Якоби.

9.6 Литература

При подготовке этой лекции использовались книги

Архангельский Ю.А. Аналитическая динамика твердого тела.

Раздел об интегрирование волчка Ковалевской написан по обзору

Дубровин Б.А.. Нелинейные уравнения и тэта-функции. Успехи математических наук, 1981, т.36, n2, с.11-80.

10 Уравнение Хилла

В этой лекции исследуются свойства решений уравнения второго порядка с периодическим коэффициентом. Изложена теория Флоке и построен пример решения уравнения со ступенчатой периодической функцией.

10.1 Теория Флоке

Здесь мы будем изучать уравнение второго порядка с коэффициентом, зависящим от времени:

$$u'' + (\theta_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \cos(nz))u = 0. \tag{36}$$

Коэффициенты в разложении Фурье периодической функции считаются такими, что ряд Фурье сходится.

Уравнение (36) называется уравнением Хилла, который исследовал решения такого уравнения в связи с теорией движения Луны.

Коэффициент уравнения – периодическая функция с периодом 2π, поэтому легко видеть, что если функция $u(t)$ – решение уравнения (36), тогда и функция $u(t+2\pi)$ – также будет решением этого уравнения. При этом, конечно, функция $u(t)$ не обязана быть периодической функцией по t. Например, при изменении на 2π она может умножаться на постоянную, или к ней может добавляться еще одно решение уравнения (36), не обязательно линейно зависимое от $u(t)$. Легко понять, что этим исчерпываются возможные изменения решения за 1π. Такой ограниченный набор сценариев позволяет довольно подробно исследовать свойства решений уравнения (36), не прибегая к построению явного решения.

Пусть функции $g(z)$ и $h(z)$ – составляют фундаментальную систему решений уравнения (36), причем, определитель Вронского этой системы равен единице. Такие функции можно подобрать из-за линейности уравнения. Для определенности примем

$$g(0) = 1, \quad g'(0) = 0, \quad h(0) = 0, \quad h'(0) = 1.$$

Общее решение уравнения (36) можно выразить в виде:

$$F(z) = Ag(z) + Bh(z),$$

где A и B – постоянные.

Тогда при изменении на период сами функции $g(z+2\pi)$ и $h(z+2\pi)$ можно выразить через $g(z)$ и $h(z)$:

$$g(z+2\pi) = \alpha_1 g(z) + \alpha_2 h(z), \quad h(z+2\pi) = \beta_1 g(z) + \beta_2 h(z).$$

Эти формулы позволяют вывести соотношение для α_j, β_j. Из неизменности вронскиана двух решений уравнения (36) следует, что

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 1.$$

Легко выразить и общее решение $F(z+2\pi)$:

$$F(z+2\pi) = (A\alpha_1 + B\beta_1)g(z) + (A\alpha_2 + B\beta_2)h(z).$$

Среди всевозможных линейных комбинаций $g(z)$ и $h(z)$, дающих решение уравнения (36), особый интерес представляет такое, что

$$F(z+2\pi) = kF(z). \tag{37}$$

Решение уравнения (36), удовлетворяющее этому свойству, называется *функцией Блоха.* Эта функция для уравнения Хилла полезна еще и тем, что $v(z) = F(-z)$ – также решение уравнения, причем, если $k \neq 1$, тогда $v(z)$ и $F(z)$ – пара линейно независимых решений уравнения (36).

Если представить $k = \exp(2\pi\mu)$, тогда функция $\phi(z) = \exp(-z\mu)\ F(z)$ – периодическая. Действительно, $\phi(z+2\pi) = \exp(-2\pi\mu)F(z+2\pi) = \phi(z)$.

Условие (37) дает систему уравнений для определения k, A, B:

$$A\alpha_1 + \beta_1 B = kA, \quad A\alpha_2 + B\beta_2 = kB.$$

Эта система уравнений однородна, следовательно, для существования ненулевого решения необходимо, чтобы определитель этой системы равнялся нулю, то есть:

$$(\alpha_1 - k)(\beta_2 - k) - \alpha_2\beta_1 = 0,$$

или

$$k^2 - (\alpha_1 + \beta_2)k + 1 = 0.$$

Это уравнение имеет два решения.

$$k_{12} = \frac{(\alpha_1 + \beta_2) \pm \sqrt{(\alpha_1 + \beta_2)^2 - 4}}{2}.$$

Вещественные решения этого уравнения существуют при $|\alpha_1 + \beta_2| \geq 2$. Причем, если $\alpha_1 + \beta_2 = \pm 2$, тогда $k = \pm 1$, и функция Блоха периодическая с периодом 2π или 4π соответственно.

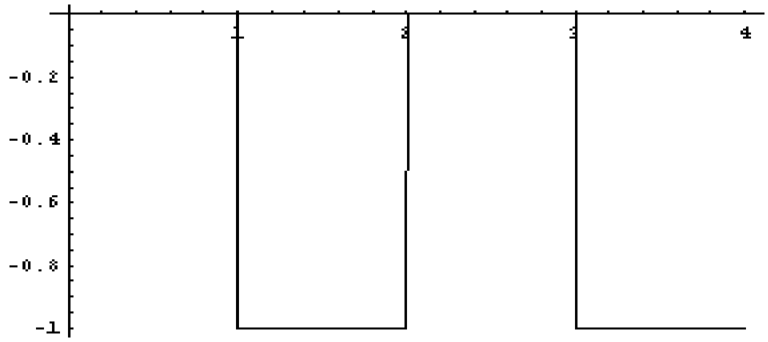

Рис. 5: Функция $q(t)$, ($T = 1$, $\varepsilon = 1$).

Если $|\alpha_1 + \beta_2| > 2$, тогда одно из значений $|k| > 1$, и функция Блоха не ограничена на оси t.

Значениям $|\alpha_1 + \beta_2| < 2$ соответствуют комплексные значения k. Для того, чтобы выяснить, как ведет себя при этом функция Блоха, вычислим $|k|$. Числа k_1 и k_2 – комплексно сопряженные. По теореме Виета произведение корней:

$$k_1 k_2 = 1.$$

Это означает, что $|k_1| = |k_2| = 1$. Следовательно, решения уравнения Хилла – ограниченные функции на всей вещественной оси.

10.2 Пример

В качестве примера уравнения Хилла, для которого можно в явном виде построить фундаментальную систему решений и функцию Блоха, рассмотрим уравнение

$$u'' + (\omega^2 + q(t))u = 0, \tag{38}$$

с периодической функцией $q(t)$ вида (см. рис.1):

$$q(t) = 0, \quad \text{при}\, 0 < t \leq T; \quad q(t) = -\varepsilon \quad \text{при}\, T < t \leq 2T.$$

Построим фундаментальную систему решений $(\phi, \bar{\phi})$ такую, что:

$$\phi(t_0, \omega) = 1, \quad \phi'(t_0, \omega) = i\omega.$$

Тогда при $0 < t \leq T$ получим:

$$\phi(t, \omega) = \exp(i\omega t),$$

при $T < t \leq 2T$ для построения ϕ необходимо решить задачу Коши:

$$\phi|_{t=T} = \exp(i\omega T), \quad \phi'|_{t=T} = i\omega \exp(i\omega T).$$

Решение этой задачи для уравнения

$$u'' + (\omega^2 - \varepsilon)u = 0$$

имеет вид:

$$\phi(t,\omega) = A\exp(i\sqrt{\omega^2-\varepsilon}(t-T)) + B\exp(-i\sqrt{\omega^2-\varepsilon}(t-T)).$$

Постоянные A и B определяются формулами:

$$\exp(i\omega T) = A + B, \quad i\omega\exp(i\omega T) = iA\sqrt{\omega^2-\varepsilon} - iB\sqrt{\omega^2-\varepsilon},$$

или

$$= \frac{1}{2}\exp(i\omega T)\Big(1 + \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2-\varepsilon}}\Big), \quad B = \frac{1}{2}\exp(i\omega T)\Big(1 - \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2-\varepsilon}}\Big).$$

Значения коэффициентов $\alpha_j,\ b_j$ можно определить из формул:

$$\begin{gathered}\phi(2T,\omega) = \alpha_1\phi(0,\omega) + \alpha_2\bar{\phi}(0,\omega)\\ \phi'(2T,\omega) = \alpha_1\phi'(0,\omega) - \alpha_2\bar{\phi}'(0,\omega),\end{gathered}$$

или

$$\begin{aligned}A\exp(iT\sqrt{\omega^2-\varepsilon}) + B\exp(-iT\sqrt{\omega^2-\varepsilon}) = \alpha_1 + \alpha_2,\\ iA\sqrt{\omega^2-\varepsilon}\exp(iT\sqrt{\omega^2-\varepsilon}) - iB\sqrt{\omega^2-\varepsilon}\exp(-iT\sqrt{\omega^2-\varepsilon}) =\\ = i\alpha_1\omega - i\alpha_2\omega.\end{aligned}$$

После простых преобразований получим:

$$\begin{aligned}\alpha_1 = \frac{1}{2}\Big[&A\exp(iT\sqrt{\omega^2-\varepsilon})(1 + \frac{\sqrt{\omega^2-\varepsilon}}{\omega}) +\\ &B\exp(-iT\sqrt{\omega^2-\varepsilon})(1 - \frac{\sqrt{\omega^2-\varepsilon}}{\omega})\Big],\\ \alpha_2 = \frac{1}{2}\Big[&A\exp(iT\sqrt{\omega^2-\varepsilon})(1 - \frac{\sqrt{\omega^2-\varepsilon}}{\omega}) +\\ &B\exp(-iT\sqrt{\omega^2-\varepsilon})(1 + \frac{\sqrt{\omega^2-\varepsilon}}{\omega})\Big].\end{aligned}$$

Подставив в формулу для коэффициента a выражения для A и B, получим:

$$\begin{aligned}\alpha_1 = \frac{\exp(iT(\omega + \sqrt{\omega^2-\varepsilon}))}{4}\Big(1 + \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2-\varepsilon}}\Big)\Big(1 + \frac{\sqrt{\omega^2-\varepsilon}}{\omega}\Big) -\\ -\frac{\exp(iT(\omega - \sqrt{\omega^2-\varepsilon}))}{4}\Big(1 - \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2-\varepsilon}}\Big)\Big(1 - \frac{\sqrt{\omega^2-\varepsilon}}{\omega}\Big).\end{aligned}$$

После умножения и приведения подобных слагаемых получим:

$$\alpha_1 = \exp(i\omega T)\Big(\cos(T\sqrt{\omega^2-\varepsilon}) + \frac{2\omega^2-\varepsilon}{2\omega\sqrt{\omega^2-\varepsilon}} i\sin(T\sqrt{\omega^2-\varepsilon})\Big).$$

Так как здесь α_1 и β_2 – величины комплексно сопряженные, поэтому коэффициент в уравнении для k $\alpha_1+\beta_2 = 2\Re(\alpha_1)$. Выражение для вещественной части α_1:

$$\Re(\alpha_1) = \cos(T\omega)\cos(T\sqrt{\omega^2-\varepsilon}) - \frac{2\omega^2-\varepsilon}{2\omega\sqrt{\omega^2-\varepsilon}}\sin(\omega T)\sin(T\sqrt{\omega^2-\varepsilon}).$$

10.3 Задача

Показать зоны неустойчивости по отношению к параметрическому возмущению $q(t)$ на графике соотношения между частотой ω и параметром ε.

10.4 Литература

Вопрос о свойствах линейных уравнений с периодическими коэффициентами обычно излагается в курсе дифференциальных уравнений:

1. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

2. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Более подробно про теорию уравнения Хилла и решение уравнения Хилла через бесконечный определитель Хилла см. в

3. Уиттекер, Ватсон. Курс современного анализа.

Пример близок к примеру разобранному в книге

4. Арнольд В.И.. Математические методы классической механики.

11 Функции Матьё

Приведены примеры, из математической физики и механики, в которых возникает уравнение Матьё. Дано определение функций Матьё и указан алгоритм их построения.

11.1 Примеры

Приведены примеры задач, сводящихся к решению уравнения Матьё. Уравнение Матьё обычно записывается в виде:

$$u'' + (a + 16q\cos 2z)u = 0. \tag{39}$$

Исторически это уравнение появилось при изучении уравнения колебаний пластины:

$$\partial_x^2 V + \partial_y^2 V = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 V.$$

Вывод уравнения Матьё довольно громоздок, и здесь лишь приводятся формулы, воспользовавшись которыми, читатель может самостоятельно прийти к уравнению Матьё.

Прежде всего будем предполагать, что пластина колеблется с постоянной частотой p, тогда от волнового уравнения можно перейти к уравнению Гельмгольца:

$$\partial_x^2 v + \partial_y^2 v + \frac{p^2}{c^2}v = 0.$$

Теперь от декартовых координат перейдем к эллиптическим:

$$x + iy = h\,\mathrm{ch}(\xi + i\eta), \quad \text{или} \quad x = h\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\eta, \quad y = h\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\eta.$$

где $(\pm h, 0)$ – фокусы эллиптической мембраны. Конечно, в этих координатах $\xi \geq 0$, $-\pi < \eta \leq \pi$, в новых переменных уравнение Гельмгольца примет вид:

$$\partial_\xi^2 u + \partial_\eta^2 u + \frac{h^2p^2}{c^2}(\mathrm{ch}^2\,\xi - \cos^2\eta)u = 0.$$

Теперь легко разделить переменные:

$$u = F(\xi)G(\eta).$$

В результате для функции $G(\eta)$ получается уравнение Матьё:

$$\frac{d^2G}{d\eta^2} + (A - \frac{h^2p^2}{c^2}\cos^2\eta)G = 0.$$

Уравнение (39) получится, если принять $a = A - \frac{h^2p^2}{2c^2}$, $q = \frac{h^2p^2}{32c^2}$.

По сути построения – решение – периодическая функция по η. Поэтому в задаче, связанной с колебаниями эллиптической мембраны, надо найти такие значения параметра a, при которых существуют периодические решения уравнения Матьё с периодом 2π.

Ещё один пример, в котором возникает уравнение Матьё – математический маятник с периодически колеблющейся точкой подвеса, если точка подвеса колеблется в вертикальном положении по закону $\cos \Omega t$ с амплитудой A. Уравнение математического маятника в этом случае можно записать в виде:

$$(mg + A\cos\Omega t)\sin\phi + ml\phi'' = 0$$

или

$$\theta'' + (\frac{g}{l} + \frac{a}{l}\cos\Omega t)\sin\theta = 0.$$

Если рассматривать малые колебания маятника в окрестности нижнего положения равновесия, тогда получим:

$$u'' + (1 + q\cos\Omega t)u = 0.$$

В окрестности верхнего положения равновесия уравнение математического маятника:

$$u'' - (1 + q\cos\Omega t)u = 0.$$

Таким образом, уравнение Матьё определяет устойчивость положений равновесия математического маятника. В этом случае нас будет интересовать вопрос о том, есть ли растущие решения уравнения Матьё при данных значениях параметров уравнения.

11.2 Функции Матьё

Уравнение Матьё

$$u'' + (a + 16q\cos 2z)u = 0$$

при $q = 0$ и $a = n^2$ имеет периодические решения с периодом 2π вида:

$$\begin{array}{cccc} 1 & \cos z & \cos 2z & \ldots \\ & \sin z & \sin 2z & \ldots . \end{array}$$

Решения уравнения Матьё, приводящие при $q \to 0$ к выше перечисленным косинусам и синусам, называются *функциями Матьё порядка* $n = 0, 1, 2, \ldots$. Для этих функций приняты обозначения:

$$\begin{array}{cccc} ce_0(z,q) & ce_1(z,q) & ce_2(z,q) & \ldots \\ & se_1(z,q) & se_1(z,q) & \ldots . \end{array}$$

Приведенное определение не обеспечивает однозначное построение функций Матьё. Здесь для однозначности необходимо добавить требование, чтобы коэффициент Фурье-разложения функции Матьё n-го порядка при $\cos(nz)$ или $\sin(nz)$ равнялся единице (не зависел от q).

Здесь надо заметить, что параметр a зависит от q и лишь при $q = 0$ $a = n^2$. Зависимость a от q можно определить при построении функции Матьё соответствующего порядка. Алгоритм построения этих функций приведен в следующем пункте.

11.3 Построение функций Матьё

Будем искать функцию $ce_0(z, q)$ в виде:

$$ce_0(z, q) = 1 + qv_1(z) + q^2 v_2(z) + \dots . \tag{40}$$

Параметр a:

$$a = a_1 q + a_2 q^2 + a_3 q^3 + \dots . \tag{41}$$

Подставим представления (40) и (41) в уравнение Матьё и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях параметра q. В результате получится рекурентная последовательность уравнений:

$$\begin{aligned} v_1'' + a_1 + 16\cos(2z) = 0,\\ v_2'' + a_2 + a_1 v_1 + 16 v_1 \cos(2z) = 0,\\ v_3'' + a_3 + a_1 v_2 + a_2 v_1 + 16 v_2 \cos(2z) = 0,\\ \dots . \end{aligned}$$

Решение уравнения для v_1:

$$v_1 = -\frac{a_1 z^2}{2} + 4\cos(2z) + c_1 z + c_0.$$

Нас интересует периодическое решение, поэтому $a_1 = 0$, $c_1 = 0$. Кроме того, это решение не должно содержать слагаемых, которые дают вклад в нулевой коэффициент разложения Фурье функции $ce_0(z, q)$, поэтому и $c_0 = 0$. Окончательно:

$$v_1 = 4\cos(2z).$$

Уравнение для v_2 в этом случае упрощается:

$$v_2'' = -a_2 - 64\cos^2(2z)$$

или

$$v_2'' = -a_2 - 32 - 32\cos(4z).$$

Интересующее нас решение имеет вид:

$$v_2 = -\frac{a_2 + 32}{2} z^2 + 2\cos(4z).$$

Требование периодичности приводит к условию:

$$a_2 = -32.$$

Уравнение для v_3:

$$v_3'' = 128\cos(2z) - 32\cos(4z)\cos(2z).$$

После применения тригонометрической формулы

$$\cos(2z)\cos(4z) = \frac{1}{2}\big(\cos(2z) + \cos(6z)\big)$$

и решения уравнения получим:

$$v_3 = -64\cos(2z) + \frac{16}{9}\cos(6z).$$

параметр $a_3 = 0$.

С помощью приведенного алгоритма можно построить функцию Матьё в виде ряда по степеням q и определить a, также в виде ряда по степеням q. Оказывается, (здесь это не доказывается), построенные таким образом ряды сходятся, и функции Матьё – целые функции параметра z.

Построенные несколько членов ряда для $ce_0(z,q)$:

$$ce_0(z,q) = 1 + (4q - 64q^2 + \ldots)\cos(2z) +$$
$$(2q^2 + \ldots)\cos(4z) + \left(\frac{16}{9}q^3 + \right)\cos(6z) + \ldots,$$
$$a = -32q^2 + \ldots.$$

Для справки приведем формулы для функций $ce_1(z,q)$ и $se_1(z,q)$:

$$ce_1(z,q) = \cos(z) + \sum_{r=1}^{\infty}\Big(\frac{2^r q^r}{(r+1)!r!} - \frac{2^{r+1} r q^{r+1}}{(r+1)!(r+1)!} +$$
$$\frac{2^r q^{r+1}}{(r-1)!(r+2)!} + O(q^{r+3})\Big)\cos((2r+1)z),$$

где

$$a = 1 - 8q - 8q^2 + 8q^3 - \frac{8}{3}q^4 + O(q^5).$$

$$se_1(z,q) = \sin(z) + \sum_{r=1}^{\infty} \Big(\frac{2^r q^r}{(r+1)!r!} + \frac{2^{r+1} r q^{r+1}}{(r+1)!(r+1)!} + \frac{2^r q^{r+1}}{(r-1)!(r+2)!} + O(q^{r+3}) \Big) \sin((2r+1)z),$$

где

$$a = 1 + 8q - 8q^2 + 8q^3 - \frac{8}{3}q^4 + O(q^5).$$

11.4 Уравнение Матьё в форме Линдемана

Если сделать тригонометрическую замену независимой переменной: $\xi = \cos^2(z)$:

$$\frac{d}{dz} = \frac{d\xi}{dz}\frac{d}{d\xi} = -2\cos(z)\sin(z)\frac{d}{d\xi},$$

$$\frac{d^2}{dz^2} = \frac{d}{dz}\Big(-\sin(2z)\frac{d}{d\xi}\Big) = \sin^2(2z)\frac{d^2}{d\xi^2} - 2\cos(2z)\frac{d}{d\xi},$$

$$\sin^2(2z) = 4\xi(1-\xi); \quad \cos(2z) = \xi - (1-\xi) = 2\xi - 1.$$

Уравнение Матьё примет вид:

$$4\xi(1-\xi)\frac{d^2u}{d\xi^2} + 2(1-2\xi)\frac{du}{d\xi} + (a - 16q + 32q\xi)u = 0.$$

Это уравнение имеет две регулярных особых точки $\xi = 0$ и $\xi = 1$. Точка $\xi = \infty$ – существенно особая точка этого уравнения. В окрестности регулярных особых точек можно построить по два линейно независимых решения этого уравнения, как это было сделано для гипергеометрической функции. Для этих решений также можно развить подобие теории Флоке, если рассматривать их на соответствующей римановой поверхности.

11.5 Задача

Выяснить, существуют ли такие значения q и Ω, при которых оказывается устойчивым верхнее положение математического маятника с осциллирующей точкой подвеса.

11.6 Литература

При подготовке этой лекции использовался учебник

Уиттекер, Ватсон, Курс современного анализа.

12 Уравнение Ламе

Приводится вид уравнения Ламе и кратко объясняется происхождение и общий вид функций Ламе. Основное внимание уделено решению уравнения Ламе в специальном случае в терминах эллиптического синуса Якоби.

12.1 Уравнение Ламе

Уравнением Ламе обычно называется уравнение вида

$$4\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}\frac{d}{d\lambda}\left[\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}\frac{d\Lambda}{d\lambda}\right] = [n(n+1)\lambda + C]\Lambda.$$

Это уравнение появляется при переходе к эллипсоидальным координатам и разделении переменных в уравнении Лапласа. Здесь параметры a, b, c – параметры эллипсоидальной системы координат. Числа n и C – параметры самого уравнения Ламе.

Классическая теория уравнения Ламе и функций Ламе связана с эллипсоидальной заменой переменных, поэтому как и в случае уравнения Матьё, в этой теории рассматриваются не все решения уравнения Ламе с произвольными значениями параметров (такое уравнение называется обобщенным уравнением Ламе), а уравнения со специально подобранными коэффициентами C и натуральными значениями параметра n. Оказывается, что для любого натурального значения n можно так подобрать $1 + n/2$ значений коэффициетов C, что для уравнения Ламе с каждым из таких C можно построить решение в виде полинома по λ степени n. Такие решения называются функциями Ламе, а уравнения с такими и только такими специальными значениями C называются уравнениями Ламе.

Уравнение Ламе можно переписать в виде, содержащем эллиптическую функцию Вейерштрасса. Для этого надо сделать замену независимой переменной:

$$\lambda = \mathcal{P}(u) + \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2),$$

тогда:

$$\frac{d^2\Lambda}{du^2} = (n(n+1)\mathcal{P}(u) + B)\Lambda,$$

где

$$B = C - \frac{1}{3}\,n(n+1)(a^2+b^2+c^2).$$

Ещё одна форма записи уравнение Ламе использует функцию дельта амплитуды (эллиптический синус).

$$\alpha = iK' + u\sqrt{e_1 - e_3}, \quad k = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 - c^2}},$$

где $e_1 > e_2 > e_3$ – корни уравнения $4x^3 - g_2 x - g_3 = 0$ (параметры g_2 и g_3 определяют функцию Вейерштрасса), тогда

$$\frac{d^2\Lambda}{d\alpha^2} = (n(n+1)k^2 \mathrm{sn}(\alpha|k) + A)\Lambda,$$

где

$$B + e_3 n(n+1) = A(e_1 - e_3).$$

12.2 Алгоритм построения функций Ламе

Для построения функций Ламе – решений уравнения Ламе в форме Вейерштрасса используют метод неопределенных коэффициентов. Решение уравнения ищут в виде многочлена степени N от функции Вейерштрасса:

$$\Lambda(u) = E_N(u) \equiv \mathcal{P}^N(u) + a_1 \mathcal{P}^{N-1}(u) + \ldots + a_{N-1}\mathcal{P}(u) + a_N.$$

Вторая производная Λ:

$$\begin{aligned} \Lambda'' = [n(n-1)\mathcal{P}^{n-2}(u) + a_1(n-1)(n-2)\mathcal{P}^{N-3}(u) + \ldots + a_{N-2}] \times \\ \times [4\mathcal{P}^3(u) - g_2\mathcal{P}(u) - g_3] + \\ [n\mathcal{P}^{N-1}(u) + a_2(N-1)\mathcal{P}^{N-2}(u) + \ldots + a_{N-1}][6\mathcal{P}^2(u) - g_2/2]. \end{aligned}$$

Теперь, если приравнять выражение для второй производной к правой части уравнения Ламе, легко видеть, что и слева и справа содержатся полиномы одинаковых степеней по $\mathcal{P}(u)$. Приравнивая коэффициенты в старшем порядке, получим:

$$4N(N-1) + 6N = n(n+1) \quad \text{или} \quad 2N(2N+1) = n(n+1).$$

Отсюда получается, что $n = 2N$.

Для вычисления коэффициентов при остальных $N+1$ (начиная с нулевой) степенях $\mathcal{P}(u)$ у нас имеется N свободных параметров a_j и еще один параметр B в уравнении. Эти параметры можно подобрать так, что функция $E_n(u)$ будет решением уравнения Ламе.

12.3 Специальный случай уравнения Ламе

Рассмотрим уравнение Ламе в форме Якоби:

$$\frac{d^2\Lambda}{d\alpha^2} = (n(n+1)k^2\mathrm{sn}^2(\alpha|k) + A)\Lambda.$$

Здесь нас будет интересовать также не общий случай этого уравнения, когда параметр A произвольный, а специальный, – когда уравнение Ламе получается линеаризацией на ненулевом решении уравнения для функции $\mathrm{sn}(t)$.

Покажем, как получается линеаризованное уравнение. Уравнение второго порядка, которому удовлетворяет функция $\mathrm{sn}(t|k)$ имеет вид:

$$u'' = -(1+k^2)u + 2k^2u^3.$$

Будем решение этого уравнения искать в виде:

$$u(t) = \mathrm{sn}(t|k) + \varepsilon v(t).$$

Если подставить эту формулу в уравнение для u, выписать уравнения для коэффициентов при ε^j, $j = 0, 1, 2, 3$, тогда уравнение при ε^0 выполняется тождественно, а при ε получим уравнение:

$$v'' = (6k^2\mathrm{sn}^2(t|k) - (1+k^2))v. \tag{42}$$

Это уравнение и называется линеаризованным уравнением. Оно является специальным случаем уравнения Ламе (здесь $n = 2$).

Одно из решений уравнения (42) легко получить, продифференцировав решение нелинейного уравнения – уравнения для эллиптического синуса:

$$v_1(t|k) = \frac{d}{dt}\mathrm{sn}(t|k) = \mathrm{cn}(t|k)\mathrm{dn}(t|k). \tag{43}$$

Второе линейно независимое решение уравнения (42) получается, исходя из свойства независимости от t вронскиана двух решений уравнения (42):

$$W(v_1, v_2) = v_1v_2' - v_2v_1' = const.$$

Будем искать такое второе решение, что вронскиан $W(v_1, v_2) = 1$. Тогда формулу для вронскиана можно рассматривать как дифференциальное уравнения для неизвестной функции $v_2(t)$. Воспользовавшись методом вариации постоянных, легко получить формулу для v_2:

$$v_2(t) = v_1(t)\int_0^t \frac{d\tau}{v_1^2(\tau)}$$

или
$$v_2(t) = \mathrm{cn}(t)\mathrm{dn}(t)\int_0^t \frac{d\tau}{(1-\mathrm{sn}^2(\tau))(1-k^2\mathrm{sn}^2(\tau))}. \tag{44}$$

Найденная формула для решения $v_2(t)$ пригодна только до тех пор, пока знаменатель не обратится в нуль, то есть при $-K(k) < t < K(k)$. В точках $t_m = (2m+1)K$ функция $\mathrm{cn}(t) = \sqrt{1-\mathrm{sn}^2(t)}$ имеет нуль первого порядка. Следовательно, подынтегральная функция в таких точках имеет полюс второго порядка, и интеграл, интервал интегрирования которого включает точки t_m, не существует.

Формулу (44) можно использовать и на всей оси t, однако, для этого надо регуляризовать расходящийся интеграл. Регуляризовать его можно, например, следующим образом.

$$\int_{t_m-\delta}^{t_m+\delta} \frac{d\tau}{v_1^2(\tau)} = -\int_{t_m-\delta}^{t_m+\delta} \frac{1}{v_1'(\tau)}\, d\Big(\frac{1}{v_1(\tau)}\Big) = -\frac{1}{v_1(\tau)v_1'(\tau)}\Big|_{t_m-\delta}^{t_m+\delta} -$$
$$\int_{t_m-\delta}^{t_m+\delta} \frac{v_1''(\tau)}{v_1(\tau)(v_1'(\tau))^2} = -\frac{1}{v_1(\tau)v_1'(\tau)}\Big|_{t_m-\delta}^{t_m+\delta} -$$
$$-\int_{t_m-\delta}^{t_m+\delta} \frac{6k^2\mathrm{sn}^2(\tau)-(1+k^2)}{(v_1'(\tau))^2} dt$$

или

$$\int_{t_m-\delta}^{t_m+\delta} \frac{d\tau}{v_1^2(\tau)} = -\frac{1}{v_1(\tau)v_1'(\tau)}\Big|_{t_m-\delta}^{t_m+\delta} - \int_{t_m-\delta}^{t_m+\delta} \frac{6k^2\mathrm{sn}^2(\tau)-(1+k^2)}{(v_1'(\tau))^2} dt,$$

где $\delta < K(k)$.

Таким образом формулы (43) и (44) дают два линейно независимых решения уравнения (42).

Замечание. Если таким образом регуляризовать интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\cos^2(t)},$$

тогда получим:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\cos^2(t)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} \frac{dt}{\cos^2(t)} + \frac{1}{\sin(t)\cos(t)}\Big|_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} +$$
$$+\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} \frac{-dt}{\sin^2(t)} + \int_{\frac{\pi}{2}+\delta}^{\frac{3\pi}{2}-\delta} \frac{dt}{\cos^2(t)} + \frac{1}{\sin(t)\cos(t)}\Big|_{\frac{3\pi}{2}-\delta}^{\frac{3\pi}{2}+\delta} +$$
$$+\int_{\frac{3\pi}{2}-\delta}^{\frac{3\pi}{2}+\delta} \frac{-dt}{\sin^2(t)} + \int_{\frac{3\pi}{2}+\delta}^{2\pi} \frac{dt}{\cos^2(t)} =$$

$$= \operatorname{tg}(t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}+\delta}^{\frac{\pi}{2}-\delta} + \frac{1}{\sin(t)\cos(t)}\Big|_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} + \operatorname{ctg}(t)\Big|_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} + \operatorname{tg}(t)\Big|_{-\frac{3\pi}{2}+\delta}^{\frac{3\pi}{2}-\delta} +$$

$$\frac{1}{\sin(t)\cos(t)}\Big|_{\frac{3\pi}{2}-\delta}^{\frac{3\pi}{2}+\delta} + \operatorname{ctg}(t)\Big|_{\frac{3\pi}{2}-\delta}^{\frac{3\pi}{2}+\delta} = 2\operatorname{ctg}(\delta) - \frac{2}{\sin(\delta)\cos(\delta)} -$$

$$-2\operatorname{tg}(\delta) + 2\operatorname{ctg}(\delta) - \frac{2}{\sin(\delta)\cos(\delta)} + 2\operatorname{tg}(\delta)$$

или

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\cos^2(t)} = 4\,\frac{\cos^2(\delta) - 1 + \sin^2(\delta)}{\sin(\delta)\cos(\delta)} = 0.$$

12.4 Вырожденный случай

Особый интерес представляет случай, когда $k = 1$. При этом эллиптический синус вырождается в $\tanh(t)$. Линеаризованное уравнение (уравнение Ламе) принимает вид:

$$v'' = (6\tanh^2(t) + 2)v.$$

Решение $v_1(t) = \frac{1}{\cosh^2(t)}$. Второе решение линеаризованного уравнения получается из формулы для $v_2(t)$:

$$v_2(t) = \frac{1}{16\cosh^2(t)}\Big(\frac{1}{2}\sinh(t) + 4\sinh(2t) + 6t\Big).$$

Замечание. Решение уравнения эллиптического синуса при $k = 1$ отделяет область периодических решений связанного с этим уравнением уравнения математического маятника от области непериодических решений. Это особое решение называется *сепаратрисой*. Тот факт, что линеаризованное на сепаратрисе уравнение имеет экспоненциально растущее решение $v_2(t)$, указывает на неустойчивость по Ляпунову сепаратрисного решения.

12.5 Литература

Подробнее о функциях Ламе можно прочитать в

Уиттекер, Ватсон, Курс современного анализа.

Регуляризация интеграла в во втором решении линеаризованного уравнения взята из статьи

М.В. Федорюк, Метод ВКБ для нелинейного уравнения второго порядка. Журн. Выч. Матем. и Мат. Физ., 1986, т.26, n2, с.198-210.

13 Вопросы к зачету

1. Интегральное представление гамма-функции. Область определения и полюсы.

2. Представление Ганкеля для гамма-функции в виде интеграла по петле.

3. Классификация особых точек. Гипергеометрическое уравнение.

4. Представление функции Бесселя в виде ряда. Разностное уравнение для функции Бесселя.

5. Разностное уравнение и интегральное представление функции Бесселя.

6. Функции Ганкеля и явление Стокса.

7. Функция Вейерштрасса. Двоякопериодичность.

8. Теорема Лиувилля для эллиптических функций и ее следствия.

9. Функция синус амплитуды. Двоякопериодичность.

10. Функция дельта амплитуды и решение уравнения математического маятника.

11. Эллиптические функции Якоби, свойства.

12. Представление функции синус амплитуды в окрестности $k = 0$ и $k = 1$.

13. Тэта-функция Якоби и ее свойства.

14. Нули тэта-функций.

15. Решение волчка Эйлера в терминах функции синус амплитуды.

16. Теория Флоке.

17. Функции Матьё.

18. Решение уравнения Ламе в специальном случае и его свойства.